

VŠB – Technická univerzita Ostrava
Fakulta strojní
Katedra mechaniky

Studentská formule, zavěšení motoru na rámu
Student Formula, the Motor Seating on the Frame

Student:

Marek Klemenc

Vedoucí bakalářské práce:

doc. Ing. Jiří Podešva, Ph.D.

Ostrava 2014

Zadání bakalářské práce

Student:

Marek Klemenc

Studijní program:

B2341 Strojírenství

Studijní obor:

3901R003 Aplikovaná mechanika

Téma:

Studentská formule, zavěšení motoru na rámu
Student Formula, the Motor Seating on the Frame

Zásady pro vypracování:

1. Popis problému, řešerše obvyklých řešení
2. Analýza současné konstrukce rámu, návrh možností uložení motoru
3. Modelování statických a dynamických vlastností navrženého uložení
4. Posouzení a vyhodnocení, konečný návrh
5. Shrnutí a závěr

Seznam doporučené odborné literatury:

- [1] Brousil, J., Slavík, J., Zeman, V. : Dynamika. SNTL, Praha, 1989.
- [2] Juliš, K., Brepta, R. : Mechanika II. díl, dynamika. SNTL, Praha, 1987.
- [3] Vlk, F. : Dynamika motorových vozidel. Nakladatelství Vlk, Brno 2003. ISBN 80-238-5273-6
- [4] Vinogradov, O. : Fundamentals of Kinematics and Dynamics of Machines and Mechanisms. CRC Press, London, 2000.

Formální náležitosti a rozsah bakalářské práce stanoví pokyny pro vypracování zveřejněné na webových stránkách fakulty.

Vedoucí bakalářské práce: **doc. Ing. Jiří Podešva, Ph.D.**

Datum zadání: 13.12.2013

Datum odevzdání: 19.05.2014



doc. Ing. Jiří Podešva, Ph.D.
vedoucí katedry

doc. Ing. Ivo Hlavatý, Ph.D.
děkan fakulty

Prohlašuji, že jsem celou bakalářskou práci včetně příloh vypracoval samostatně pod vedením vedoucího bakalářské práce a uvedl všechny použité podklady a literaturu.

V Ostravě 19.5.2014

Marek Klemenc
.....

Marek Klemenc

Prohlašuji, že

- jsem byl seznámen s tím, že na moji bakalářskou práci se plně vztahuje zákon č. 121/2000 Sb., autorský zákon, zejména § 35 – užití díla v rámci občanských a náboženských obřadů, v rámci školních představení a užití díla školního a § 60 – školní dílo.
- беру на ве́доміі, že Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava (dále jen „VŠB-TUO“) má právo nevýdělečně ke své vnitřní potřebě bakalářskou práci užít (§ 35 odst. 3).
- souhlasím s tím, že bakalářská práce bude v elektronické podobě uložena v Ústřední knihovně VŠB-TUO k nahlédnutí a jeden výtisk bude uložen u vedoucího bakalářské práce. Souhlasím s tím, že údaje o kvalifikační práci budou zveřejněny v informačním systému VŠB-TUO.
- bylo sjednáno, že s VŠB-TUO, v případě zájmu z její strany, uzavřu licenční smlouvu s oprávněním užít dílo v rozsahu § 12 odst. 4 autorského zákona.
- bylo sjednáno, že užít své dílo – bakalářskou práci nebo poskytnout licenci k jejímu využití mohu jen se souhlasem VŠB-TUO, která je oprávněna v takovém případě ode mne požadovat přiměřený příspěvek na úhradu nákladů, které byly VŠB-TUO na vytvoření díla vynaloženy (až do jejich skutečné výše).
- беру на ве́доміі, že odevzdáním své práce souhlasím se zveřejněním své práce podle zákona č. 111/1998 Sb., o vysokých školách a o změně a doplnění dalších zákonů (zákon o vysokých školách), ve znění pozdějších předpisů, bez ohledu na výsledek její obhajoby.

V Ostravě 19. 5. 2014

.....


podpis

Jméno a příjmení autora práce: Marek Klemenc

Adresa trvalého pobytu autora práce: Lipová 187, Hat'

ANOTACE BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

KLEMENC, M. *Studentská formule, zavěšení motoru na rámu: bakalářská práce*. Ostrava: VŠB – Technická univerzita Ostrava, Fakulta strojní, Katedra mechaniky, 2014, 62 s. Vedoucí práce: Podešva, J.

Bakalářská práce se zabývá kontrolou a návrhem zavěšení motoru na rámu studentské formule. Jsou uvažovány dvě varianty zavěšení. První varianta je zavěšení motoru bez použití pružných a tlumících prvků – silentbloků. Druhá varianta počítá s jejich použitím. Porovnávacím kritériem jsou zde velikosti sil, které se přenášejí přes uložení na rám při vibracích motoru. Práce se skládá ze tří částí. V první části je provedeno experimentální měření potřebných parametrů a analytický výpočet modální analýzy uložení motoru. Ve druhé části je provedena modální analýza uložení motoru a modální analýza rámu se zavěšeným motorem pomocí MKP. Ve třetí části je provedena harmonická analýza pomocí MKP a vyhodnocení velikosti sil přenášovaných na rám při dvou způsobech zavěšení. Pro MKP výpočty jsou použity programy Patran a MSC Nastran.

ANNOTATION OF BACHELOR THESIS

KLEMENC, M. *Student Formula, the Motor Seating on the Frame: bachelor thesis*. Ostrava: VŠB – Technical University of Ostrava, Faculty of Mechanical Engineering, Department of Mechanics, 2014, 62 p. Thesis head: Podešva, J.

Bachelor thesis deals with the control and design of the motor seating on the frame on Student Formula. The first option is to hang the engine without the use of elastic and damping elements - rubber buffer. The second option allows their use. Comparative criteria are the value of the forces that are transmitted through the seating of the frame during engine vibration. The thesis consists of three parts. The first part is an experimental measurement of the parameters and analytical calculation of engine mounting modal analysis. The second part is a modal analysis of the engine mounting and modal analysis of the frame with motor, using FEM. The third part is the harmonic analysis using FEM and assessment of the magnitude of the forces transmitted to the frame in two ways suspension. FEM calculations are performed in the program Patran and MSC Nastran.

Obsah

Seznam použitých značek a symbolů	8
1. Úvod.....	10
2. Zavěšení motoru	11
2.1. Úvod	11
2.2. Silentblok.....	11
3. Současná konstrukce.....	12
3.1. Rám	12
3.2. Motor	14
3.3. Varianty zavěšení motoru na rámu.....	14
3.3.1. Zavěšení bez použití silentbloků	15
3.3.2. Zavěšení s použitím silentbloků	15
4. Stanovení potřebných parametrů.....	16
4.1. Stanovení momentu setrvačnosti motoru – teorie.....	17
4.2. Stanovení momentu setrvačnosti motoru – měření.....	19
4.3. Stanovení momentu setrvačnosti motoru – výpočet	21
4.4. Poloha těžiště, zbývající parametry	22
5. Modální analýza uložení – analytické řešení	23
5.1. Úvod	23
5.2. Řešení ve 2D	24
5.2.1. Sestavení pohybových rovnic.....	24
5.2.2. Výpočet vlastních frekvencí a vlastních tvarů	27
5.3. Řešení ve 3D	29
6. Modální analýza uložení – MKP modelování	31
6.1. Úvod	31
6.2. MPC prvky	31
6.3. Model pro MKP výpočet.....	32
6.4. Modální analýza	33
7. Modální analýza rámu.....	35

7.1.	Model rámu.....	35
7.2.	Uložení rámu	36
7.3.	Modální analýza	37
7.3.1.	Rám s motorem zavěšeným bez silentbloků.....	38
7.3.1.	Rám s motorem zavěšeným na silentblocích	40
8.	Harmonická analýza.....	42
8.1.	Úvod	42
8.2.	Model a okrajové podmínky pro MKP	43
8.3.	Výpočet	45
8.3.1.	Motor zavěšený bez silentbloků	45
8.3.1.	Motor zavěšený na silentblocích.....	49
9.	Shrnutí a závěr.....	52
	Přehled použité literatury	54
	Poděkování	55
	Přílohy.....	56

Seznam použitých značek a symbolů

Značení	Jednotka	Popis
R_m	[MPa]	mez pevnosti
R_e	[MPa]	mez kluzu
A	[%]	tažnost
F_R	[N]	radiální síla
$I_A, I_{AP}, I_p, I_{p0}, I_T$	[kg.m ²]	moment setrvačnosti
ε	[rad/s ²]	úhlové zrychlení
M_i	[N.m]	moment
m	[kg]	hmotnost motoru
m_p	[kg]	hmotnost přivažku
g	[m/s ²]	tíhové zrychlení
r_T	[m]	vzdálenost těžiště
φ	[°]	úhel natočení
$\hat{\varphi}$	[rad]	úhel natočení
Ω_0	[s ⁻¹]	vlastní kruhová frekvence netlumeného kmitání
t	[s]	čas
γ_0	[rad]	fázový posuv
T, T_p	[s]	perioda kmitů
r_p	[m]	poloměr přivažku
p	[m]	vzdálenost středu přivažku
e	[m]	excentricita
x, y, z	[-]	souřadné osy
b, c, h	[m]	rozměry uložení
M	[-]	matice hmot
K	[-]	matice tuhosti
q	[-]	vektor souřadnic
T	[-]	těžiště
F_{dx}, F_{dy}, F_{dz}	[N]	direkční síla
k_x, k_y, k_z	[N/m]	tuhost
Δl	[m]	prodloužení
λ	[s ⁻²]	vlastní číslo
c	[-]	vlastní tvar
A	[-]	matice A
Ω	[s ⁻¹]	vlastní kruhová frekvence

f	[Hz]	vlastní frekvence
V	[-]	modální matice
ρ	[kg/m ³]	hustota
f	[-]	vektor budících sil
q_a	[-]	vektor amplitud výchylek
ω	[s ⁻¹]	kruhová frekvence budící síly
f_a	[-]	vektor amplitud budících sil
R	[N]	reakce v základu
R_a	[N]	amplituda reakce
b	[N.m ⁻¹ .s]	koeficient tlumení
x_a	[mm]	amplituda výchylky
F_a	[N]	amplituda zatěžující síly
M_a	[N.m]	amplituda zatěžujícího momentu
n	[min ⁻¹]	otáčky

1. Úvod

Vznik konstrukční soutěže Formula SAE (Society of Automotive Engineers) sahá do roku 1978, kdy se v USA konala soutěž s názvem SAE Mini-Indy, předchůdce dnešní Formula SAE. Evropská odnož, Formula Student, vznikla v roce 1998. Obě soutěže mají prakticky totožná pravidla a stejný cíl. Jedná se o studentskou soutěž s cílem porovnání konstrukčních schopností týmů z univerzit po celém světě. Každoročně se koná několik závodů na národní i mezinárodní úrovni. V rámci soutěže se testují jak parametry na závodním okruhu, tak i statické vlastnosti, design, použité materiály, atd. Studentské týmy jsou při vývoji více či méně omezeny pravidly soutěže. Regule SAE obsahují celou řadu bezpečnostních předpisů, které musí být pro účast v soutěži Formula Student/SAE splněny. V každé formuli musí být například použit čtyřdobý zážehový motor s obsahem menším než 610 cm^3 a rám musí pevnostně vyhovět různým zátěžným stavům, které simulují například čelní náraz, nebo převrácení formule. Vítězný tým se dočká výroby svého prototypu.

První prototyp formule typu se na VŠB – TU Ostrava začal vyvíjet v roce 2013 a bude dokončen v roce 2014. V témže roce by měly být zahájeny práce na druhém prototypu formule. Při vývoji druhé generace studentské formule bude využito poznatků a zkušeností z konstrukce prvního vozu. U druhé verze už se počítá s účastí na soutěžích pořádaných v rámci Formula Student/SAE.



Obr. 1.1 Vizualizace formule vyvíjené na VŠB-TU Ostrava

Předmětem této práce je modelování a posouzení přenosu setrvačných sil od provozu motoru na rám při uvažování dvou variant zavěšení motoru – bez silentbloků a s použitím silentbloků. Výpočty jsou provedeny s využitím software Patran a MSC Nastran.

2. Zavěšení motoru

2.1. Úvod

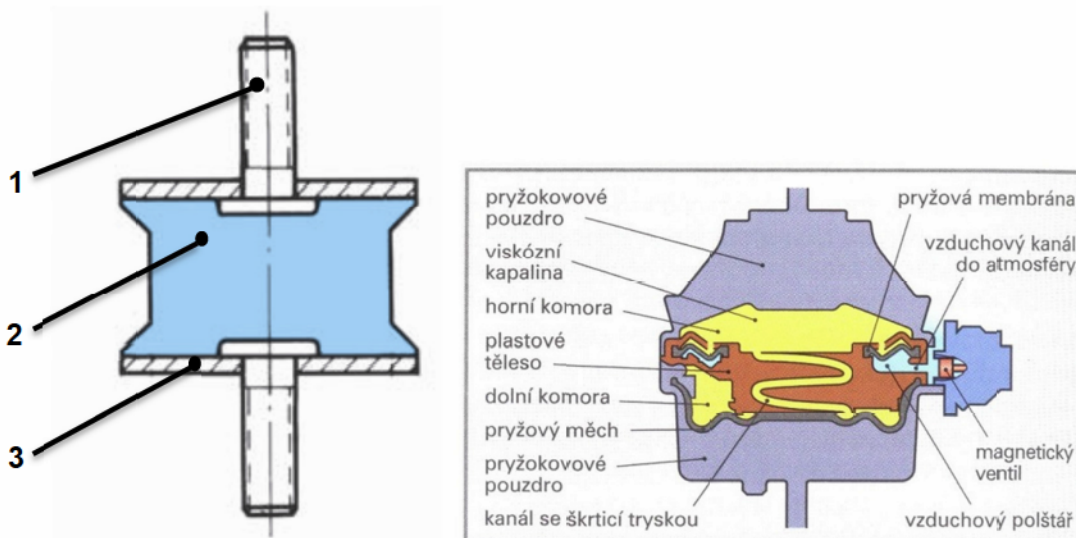
Při návrhu uložení motoru je třeba brát v potaz nevyvážené setrvačné síly v klikovém mechanismu, reakční moment k točivému momentu a budící účinky od nerovností na vozovce. Všechny tyto síly a momenty způsobují kmitání motoru. Snahou je najít kompromis mezi uložením pomocí pružných elementů s malou tuhostí, které zabraňují přenosu vibrací a hluku do kabiny řidiče, a tuhým uložením. To omezuje kmitání motoru, ale naopak přenáší všechny vibrace na karoserii.

V praxi se k zavěšení motorů používají tzv. silentbloky, viz Obr. 2.1. U moderních motorů bývá pro větší utlumení vibrací alespoň jeden silentblok s integrovaným hydraulickým tlumičem, viz Obr. 2.1.

2.2. Silentblok

Silentblok je pružina z přírodní nebo syntetické pryže uložena v ocelových držácích. Má velký vnitřní útlum a může být namáhána tlakem, krutem nebo stříhem. Používají se pro tlumení velmi malých rozkmitů, např. k uložení závěsů kol, uložení motorů a jako dorazy. Pryžové silentbloky nevyžadují údržbu, podléhají však stárnutí a proto je po čase nutná výměna. Podle typu použití se tyto tlumící prvky vyrábí v mnoha modifikacích, co se tvaru a rozměrů týče.

Pro silentbloky se používá elastická směs o tvrdosti 50 - 80 Shore, tvrdší směsi se aplikují u sportovních vozidel s tvrdší charakteristikou podvozku. V současné době se stále častěji objevují také silentbloky z trvanlivějšího polyuretanu. Ten se však používá převážně u sportovnějších automobilů, protože je přibližně o jednu třetinu tvrdší než pryž.



Obr. 1.1 Schéma silentbloku (vlevo): 1 - upevňovací šroub, 2 - pryžový blok, 3 - ocelový držák; Schéma pružného pouzdra s hydraulickým tlumením (vpravo)

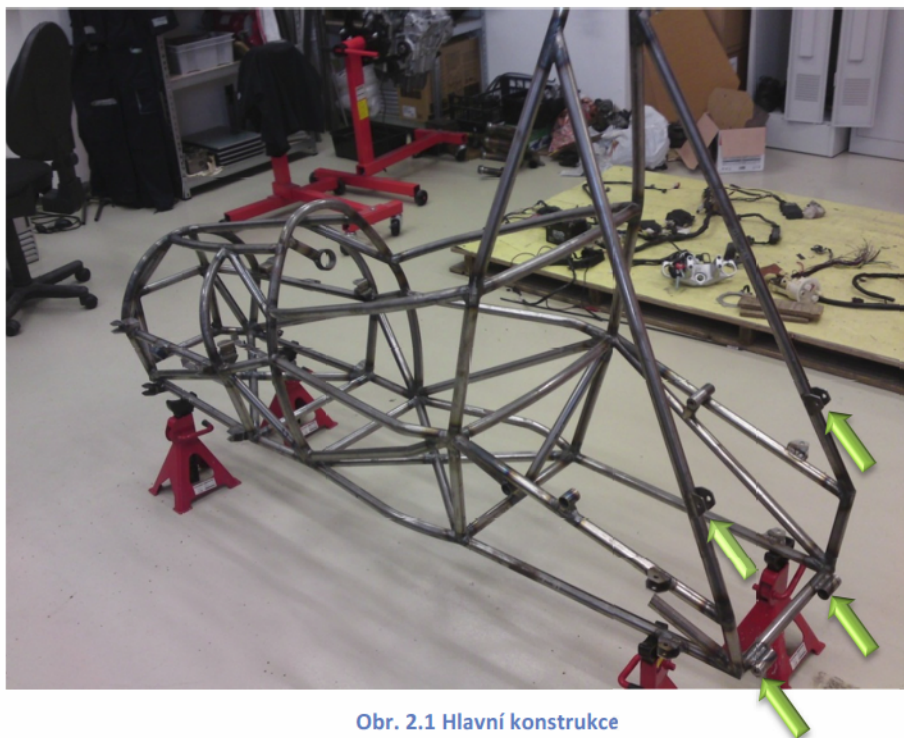
3. Současná konstrukce

3.1. Rám

Konstrukce prvního prototypu formule se skládá ze dvou částí a to z:

- hlavní konstrukce (Obr. 3.1)
- zadní nástavby (Obr. 3.2)

Obě části jsou vzájemně spojeny pomocí šroubů ve vyznačených místech.



Obr. 2.1 Hlavní konstrukce

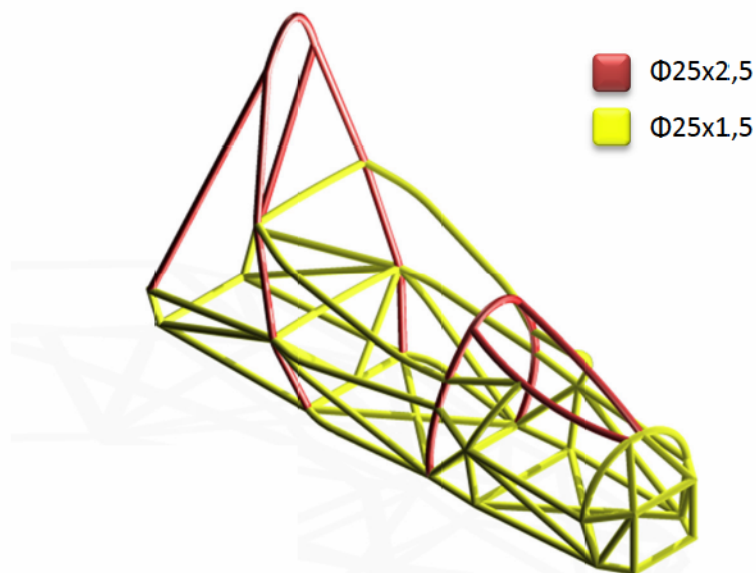


Obr. 3.2 Zadní nástavba

Oba celky jsou svařeny z ocelových profilů dle předpisů SAE:

- trubka TR $\Phi 25 \times 1,5$ - ČSN EN 10305-3 – E195+CR1S2
- trubka TR $\Phi 25 \times 2,5$ - ČSN EN 10305-3 – E195+CR1S2
- obdélníkový profil 40x25x2 – ČSN EN 10219-2

Převážná část rámu je svařena z trubek $\Phi 25 \times 1,5$. Na zadní nástavbě je navíc použit profil 40x25x2 a použití trubek $\Phi 25 \times 2,5$ na hlavní konstrukci je znázorněno na Obr. 3.3.



Obr. 3.3 Znázornění použitých profilů

Mechanické vlastnosti použité oceli E195+CR1S2 při pokojové teplotě:

Mechanické vlastnosti (minimální hodnoty)		
R_m [MPa]	R_e [MPa]	A [%]
330	195	8

Tab. 3.1 Mechanické vlastnosti použitého materiálu

Hmotnost rámu bez zadní nástavby je zvážených 30,7 kg.



Obr. 3.4 Vážení zadní části rámu

3.2. Motor

Do rámu je vsazen motor Yamaha - typ J507E. Uvedený agregát pochází z motocyklu Yamaha FZ6 Fazer. Jedná se o čtyřdobý, řadový, kapalinou chlazený čtyřválec. Bližší parametry použitého motoru včetně zvažené hmotnosti jsou v Tab. 3.2:

Rozvod	DOHC, 16 ventilů
Vrtání x zdvih	65,5 x 44,5 mm
Objem	600 cm ³
Výkon	72 kW (98k) při 12 000 ot/min
Točivý moment	63,1 Nm při 10 000 ot/min
Kompresní poměr	12,2:1
Hmotnost bez náplní	50,2 kg

Tab. 3.2 Parametry motoru



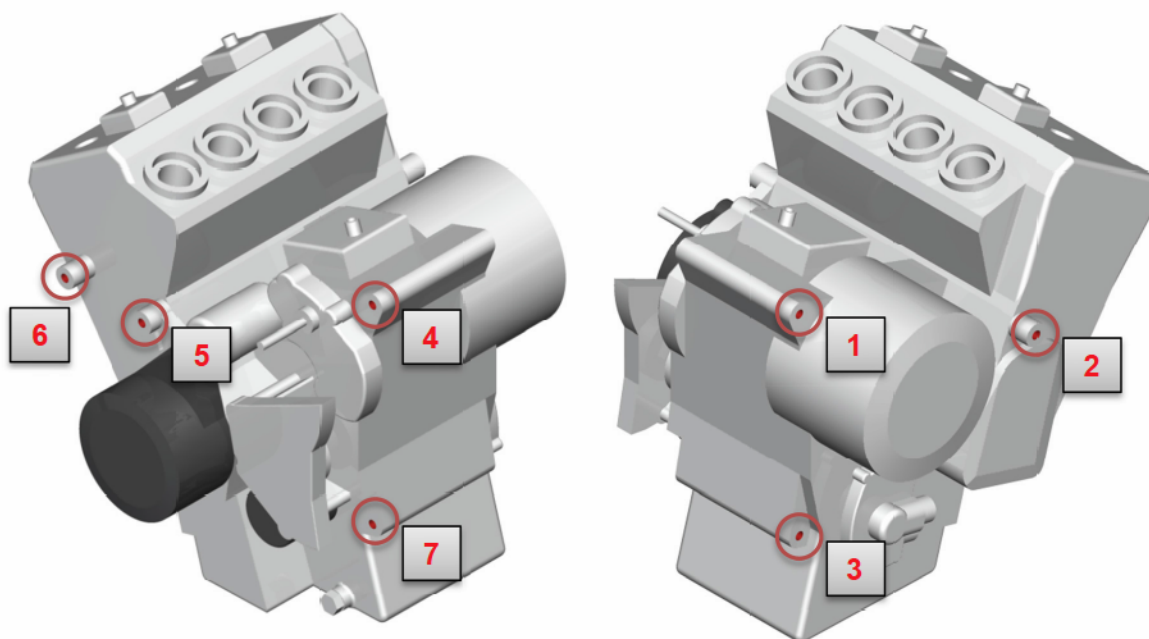
Obr. 3.5 Motor Yamaha FZ6 Fazer - typ J507E

3.3. Varianty zavěšení motoru na rámu

Možných způsobů uložení motoru je několik. Stávající konstrukce rámu však omezuje počet variant prakticky na dvě:

- a) zavěšení bez použití silentbloků
- b) zavěšení s použitím silentbloků

Motor má celkem 7 úložných bodů, ve kterých je možno realizovat připojení k rámu, viz Obr. 3.6. Číselné označení jednotlivých bodů bude využito později ve výpočtech.



Obr. 3.6 Model motoru s vyznačenými body uložení

Stávající zavěšení je realizováno bez použití silentbloků, a sice v bodech 1, 2, 4, 5 a 6. Mezi body 1 a 4, stejně tak mezi 3 a 7, je průchozí díra.

3.3.1. Zavěšení bez použití silentbloků

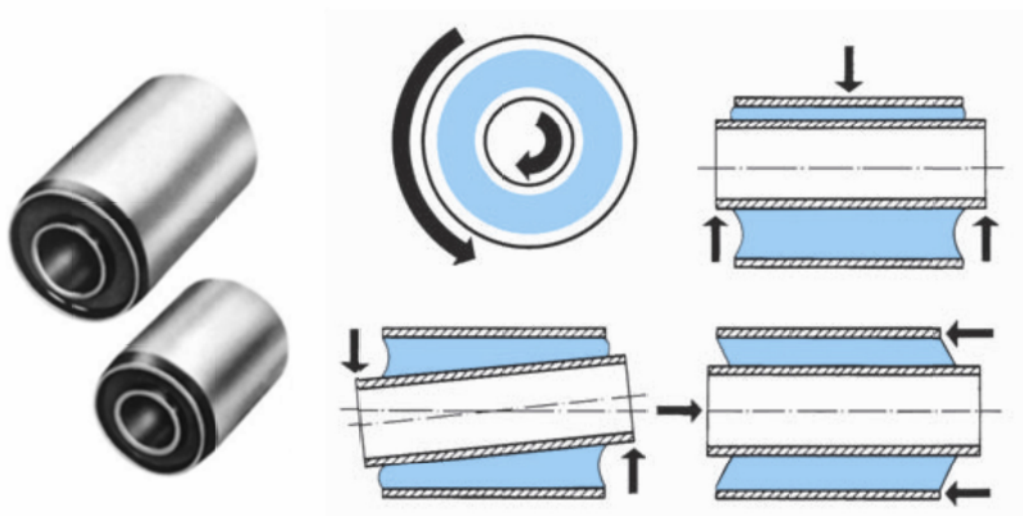
Varianta uložení bez tlumících prvků zvyšuje tuhost celého rámu. Z toho vyplývá také lepší ovladatelnost a stabilitu vozidla v zatáčkách. Na druhou stranu se dá očekávat, že u tohoto řešení bude docházet k většímu přenosu sil od provozu motoru na rám než při použití pryžových elementů. Předběžné uchycení v bodě 2 je na Obr. 3.7.



Obr. 3.7 Detail zavěšení motoru v místě 2

3.3.2. Zavěšení s použitím silentbloků

V tomto konkrétním případě připadá v úvahu použití pouzdrových pružin, viz Obr. 3.8. Ty zachycují radiální a axiální zatížení a rovněž tlumí torzní kmity. Ve výpočtech jsou použity parametry silentbloku z katalogu firmy ContiTech, viz přiložené CD.



Obr. 3.8 Pouzdrový silentblok a možné způsoby namáhání

Rozměr jsem volil s ohledem na statickou únosnost jednoho silentbloku, při uvažování rovnoměrného rozložení hmotnosti motoru do pěti bodů zavěšení. Tudíž je-li hmotnost motoru $m = 52 \text{ kg}$, pak radiální statické zatížení jednoho silentbloku bude

$$F_R = \frac{m \cdot g}{5} \quad (3.1)$$

a po dosazení pak bude mít radiální síla hodnotu

$$F_R = 102 \text{ N}.$$

Je však nutno si uvědomit, že kompletní motor, včetně oleje a dalších komponent bude mít větší hmotnost než 52 kg. Zatížení od provozu se také přenáší na silentbloky.

Po zvážení výše uvedených důvodů jsem pro výpočet zvolil rozměr silentbloku vyznačený v tabulce na Obr. 3.9. V tabulce jsou rovněž uvedeny všechny složky tuhosti ve směrech znázorněných na Obr. 3.8.

Abmessungen				Technische Daten								
Außen-Durchmesser	Innen-Durchmesser	Länge der Innenbuchse	Länge der Außenbuchse	Radial-Belastung		Axial-Belastung		Verdrehung				
				zul. stat. Radiallast	radiale Federkonstante	zul. stat. Axiallast	axiale Federkonstante	zul. stat. Verdrehwinkel	zul. stat. Drehmoment	Drehfederkonstante	zul. Spitzenverdrehwinkel	zul. Spitzen-Drehmoment
D mm	d mm	l mm	L mm	F _r N	C _r N/mm	F _a N	C _a N/mm	ψ Grad	M _d Nm	C _ψ Nm/Grad	ψ max Grad	M _d max Nm
22 ^{±0,08}	8 H11	16 ^{±0,2}	10 ^{±0,2}	100	196	140	69	13	0,7	0,054	26	1,4
24 ^{±0,08}	10 H9	17 ^{±0,1}	14 ^{±0,5}	200	491	160	103	15	1,3	0,09	30	2,6
26 ^{±0,08}	12 H9	24 ^{±0,2}	17,5 ^{±0,2}	690	1962	680	226	13	4,4	0,338	26	9,0
26 ^{±0,08}	12 H9	36 ^{±0,2}	32 ^{±0,2}	1370	3924	840	422	13	8,0	0,61	26	15,0

Obr. 3.9 Rozměry pouzdrových silentbloků z katalogu firmy ContiTech

4. Stanovení potřebných parametrů

Ještě před samotným analytickým výpočtem a konečnoprvkovým modelováním, je třeba určit všechny potřebné údaje. Základní parametry potřebné k výpočtům a modelování jednotlivých typů zavěšení jsou:

- poloha těžiště motoru
- hmotnost motoru
- momenty setrvačnosti ke třem osám procházejícím těžištěm
- vzdálenosti úložných bodů od těžiště

Hmotnost motoru byla zjištěna prostým zvážením. Na tomto místě je třeba podotknout, že zvážená hmotnost je bez náplní motoru, tj. bez oleje, a bez dalších zařízení, které jsou ve finále k motoru připevněny, např. elektronika, sání, výfukové potrubí apod.

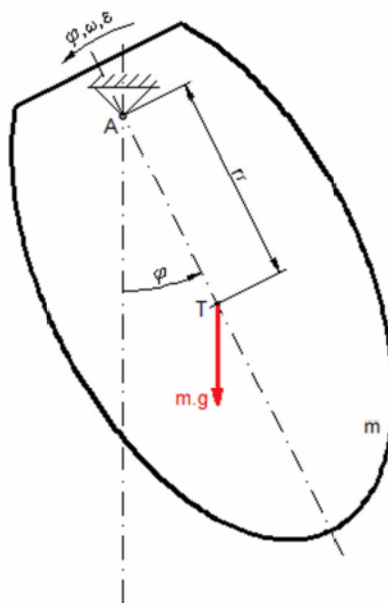
Poloha těžiště motoru zpravidla není známa, pro výpočty a následné modelování je však potřebná. Těžiště je bod, do kterého můžeme soustředit všechny hmotnostní parametry, tj. hmotnost a momenty setrvačnosti, a zjednodušit tak úlohu řešení pohybu

3D tělesa na řešení pohybu hmotného bodu. Pro velice orientační výpočet by bylo možné použít polohu těžiště a hmotnostní parametry vygenerované některým z modelovacích programů. Největší problém však je v tom, že model motoru tvoří plné těleso, které se shoduje jen vnějšími rozměry se skutečným motorem, ale vnitřní struktura (dutiny, klikové ústrojí, převody) již zahrnuty nejsou. Z tohoto důvodu je vhodné provést alespoň částečné zpřesnění daných parametrů vhodným měřením.

Momenty setrvačnosti složitěho tělesa, jakým je například spalovací motor, lze experimentálně určit pomocí metody měření doby kmitu.

4.1. Stanovení momentu setrvačnosti motoru – teorie

Zavěsíme-li těleso nad jeho hmotným středem a rozkýveme, lze pomocí změřené doby kmitu tělesa určit jeho moment setrvačnosti k ose rotace. Touto metodou tedy nezjistíme přímo moment setrvačnosti k ose procházející těžištěm.



Obr. 4.1 Schéma

Pro rotační pohyb tělesa stanovíme pohybovou rovnici ve tvaru

$$I_A \cdot \varepsilon = \sum M_i = -m \cdot g \cdot r_T \cdot \sin \varphi. \quad (4.1)$$

Pro malé úhly $\varphi < 15^\circ$ můžeme psát

$$\sin \varphi \cong \hat{\varphi} \quad (4.2)$$

a po převedení pravé strany pak dostáváme

$$I_A \cdot \varepsilon + m \cdot g \cdot r_T \cdot \varphi = 0. \quad (4.3)$$

Víme-li, že úhlové zrychlení

$$\varepsilon = \frac{d^2 \varphi}{d\varphi^2} = \ddot{\varphi}, \quad (4.4)$$

pak je rovnice (4.3) lineární diferenciální rovnicí druhého řádu, jejímž řešením je

$$\varphi = c \cdot \sin(\Omega_0 \cdot t + \gamma_0), \quad (4.5)$$

kde vlastní kruhová frekvence netlumeného kmitání

$$\Omega_0 = \sqrt{\frac{m \cdot g \cdot r_T}{I_A}}. \quad (4.6)$$

Zároveň také známe vztah mezi vlastní kruhovou frekvencí a periodou kmitů

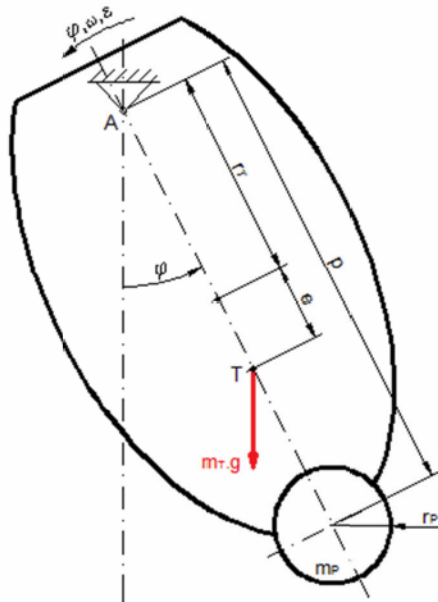
$$\Omega_0 = \frac{2 \cdot \pi}{T}. \quad (4.7)$$

Porovnáme-li rovnice (4.6) a (4.7), můžeme vyjádřit konečný vztah pro moment setrvačnosti tělesa k ose rotace

$$I_A = \frac{m \cdot g \cdot r_T \cdot T^2}{4 \cdot \pi^2}. \quad (4.8)$$

Neznáme-li však polohu těžiště r_T , musíme doplnit rovnici (4.8) o další vhodný vztah, abychom získali dvě rovnice o dvou neznámých.

Pokud polohu hmotného středu tělesa neznáme, můžeme k jeho určení použít metodu, kdy k tělesu přidáme přívazek o známé hmotnosti a jednoduchém tvaru (nejčastěji válec), u něhož jsme schopni určit polohu hmotného středu a umíme spočítat jeho moment setrvačnosti.



Obr. 4.2 Těleso s přívazkem

Pro kývající těleso s přívazkem pak bude platit

$$I_{AP} = I_A + I_P, \quad (4.9)$$

kde moment setrvačnosti přívazku k ose rotace bude s uvažováním Steinerovy věty

$$I_P = I_{P0} + m_P \cdot p^2 \quad (4.10)$$

a

$$I_{P0} = \frac{1}{2} m_P \cdot r_P^2. \quad (4.11)$$

Vzdálenost těžiště tělesa s přívažkem můžeme vyjádřit vztahem

$$r_T + e = \frac{m \cdot r_T + m_P \cdot p}{m + m_P}. \quad (4.12)$$

Zároveň také platí

$$I_{AP} = \frac{(m + m_P) \cdot g \cdot (r_T + e) \cdot T_P^2}{4 \cdot \pi^2}. \quad (4.13)$$

Postupným dosazením rovnic (4.8) až (4.12) do rovnice (4.13) a úpravami odvodíme výsledný vztah pro výpočet momentu setrvačnosti tělesa vzhledem k ose rotace

$$I_A = \frac{T^2}{T^2 - T_P^2} \cdot \left[\frac{m_P \cdot p \cdot g \cdot T_P^2}{4 \cdot \pi^2} - m_P \cdot p^2 - \frac{1}{2} m_P \cdot r_P^2 \right]. \quad (4.14)$$

Pro přepočet momentu setrvačnosti vzhledem k ose procházející těžištěm využijeme Steinerovu větu ve tvaru

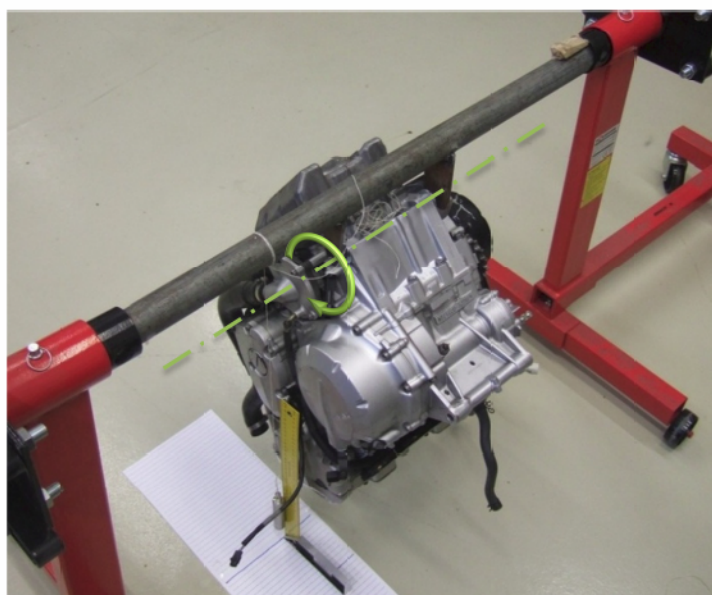
$$I_T = I_A - m \cdot r_T^2 \quad (4.15)$$

a polohu těžiště pak zjistíme ze vztahu

$$r_T = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot I_A}{m \cdot g \cdot T^2}. \quad (4.16)$$

4.2. Stanovení momentu setrvačnosti motoru – měření

K samotnému měření doby kmitu bylo nutné vyrobit přípravek, na který se motor zavěsil. Jedná se o ocelovou trubku se dvěma závěsy z ocelového plechu. Závěsy prochází upravená závitová tyč, na kterou je zavěšen motor v ose mezi body 3 a 7. Celá sestava připravená k měření je na Obr. 4.3.



Obr. 4.3 Zavěšený motor

Postup měření je následující:

- vychýlení motoru z rovnovážné polohy
- uvolnění motoru a ve stejném okamžiku se začíná měřit čas
- měří se doba několika kmitů (např. 3)
- celý postup se několikrát opakuje.

Pro jednodušší měření je na podlaze přilepena stupnice, pomocí které bylo snadné určit rozsah jednoho kmitu. Na motoru je přilepeno laserové ukazovátko, které je pomocí olovnice ustaveno ve svislé ose zavěšeného motoru. Laser ukazuje okamžité vychýlení motoru na stupnici a tak je snadné určit horní úvrať každého kyvu. Provedl jsem 5x měření doby tří kmitů a naměřené hodnoty jsou v tab. 4.1.

Pro druhou část měření je nutné přidat přivažek známé hmotnosti a jednoduchého tvaru. K motoru jsem přidal ocelový válec o hmotnosti $m_p = 3\text{ kg}$ a celý uvedený postup jsem zopakoval (viz Obr.4.4). Naměřené hodnoty jsou rovněž v tab. 4.1. Nutno podotknout, že při použití takto malého přivažku byl rozdíl v naměřených hodnotách malý, ale přesto byl při opakovaném měření patrný.



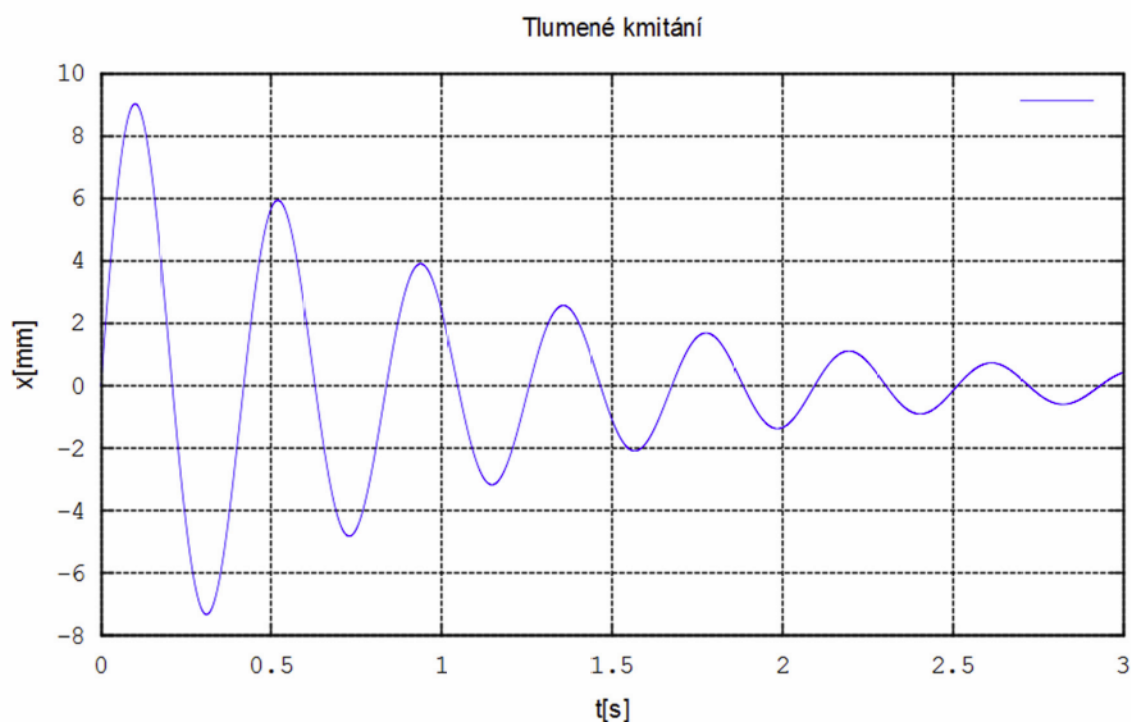
Obr. 3.4 Motor s přivažkem

	Bez přivažku	S přivažkem
Číslo měření	Doba 3 kmitů [s]	Doba 3 kmitů [s]
1	3,33	3,40
2	3,29	3,41
3	3,31	3,39
4	3,31	3,40
5	3,28	3,40
Aritm. průměr	3,30	3,40

Tab. 4.1 Změřené hodnoty kmitů

4.3. Stanovení momentu setrvačnosti motoru – výpočet

Z naměřených hodnot byly vypočteny aritmetické průměry doby 3 kmitů. Kmitání takto zavěšeného motoru je typickým příkladem vlastního tlumeného kmitání. U vlastního tlumeného kmitání s rostoucím časem klesá výchylka, avšak perioda kmitání, tj. doba jednoho kmitu se s časem nemění (stejně jako u vlastního netlumeného kmitání), viz Obr 4.5.



Obr. 4.4 Průběh výchylky v čase u vlastního tlumeného kmitání

Podle výše uvedeného je tedy možno dobu jednoho kmitu vypočíst prostým podělením doby trvání 3 kmitů

$$T = \frac{T_{3kmitů}}{3}. \quad (4.17)$$

Po dosazení průměrných hodnot do (4.17) dostaneme:

- motor bez přívazku $T = 1,10 \text{ s}$
- motor s přívazkem $T_p = 1,13 \text{ s}$

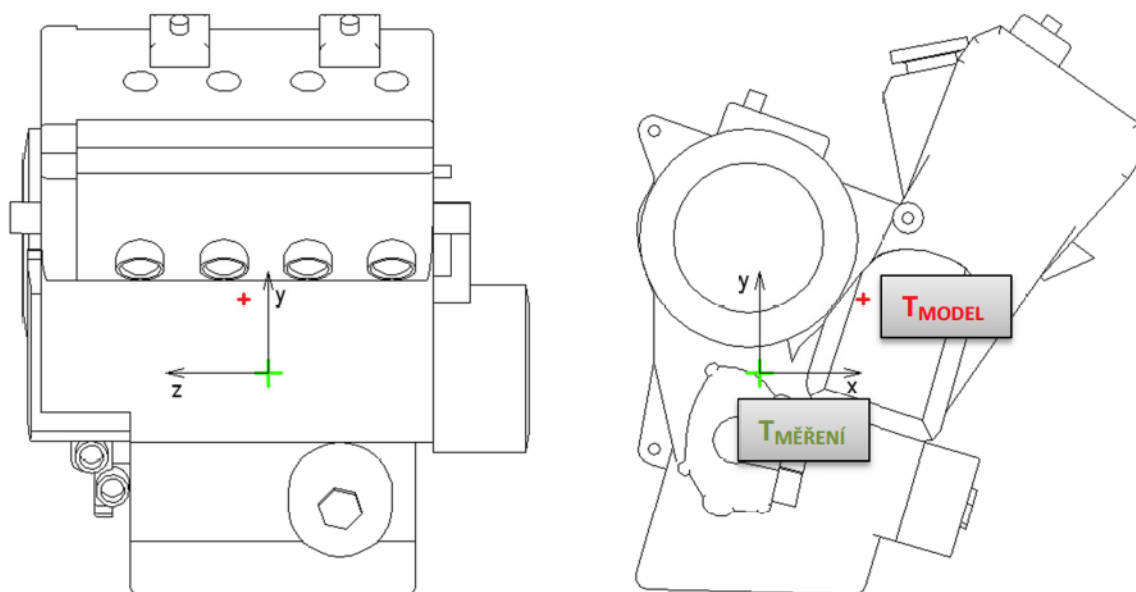
Konečně dosazením všech hodnot do (4.14) a následně do (4.16) a (4.15) vypočteme moment setrvačnosti motoru I_T k ose procházející těžištěm a vzdálenost těžiště od osy rotace r_T :

$$I_T = 1,08 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$r_T = 108,1 \text{ mm}$$

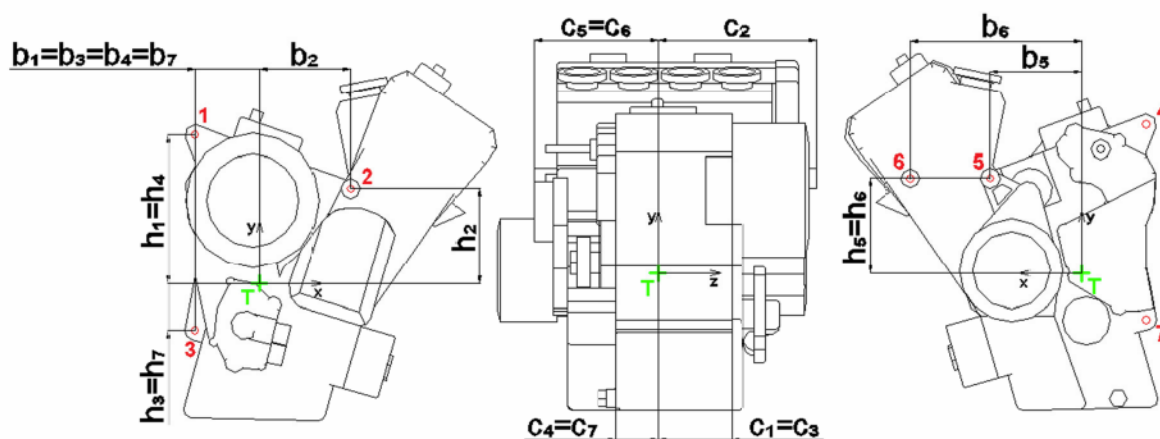
4.4. Poloha těžiště, zbývající parametry

Na následujícím obrázku (Obr. 4.6) je porovnání změřené polohy těžiště a polohy, kterou určil program Inventor podle plného modelu. Měřením jsme však zjistili polohu pouze v rovině x-y. Pozici těžiště v ose „z“ už by bylo obtížné zjistit, a proto si musíme vystačit s odhadem polohy. Ta byla konzultována a odhadnuta podle vnitřního i vnějšího uspořádání motoru.



Obr. 4.5 Znáznornění polohy těžiště

Na Obr. 4.7 jsou pak zakótovány vzdálenosti bodů zavěšení od určeného těžiště.



Obr. 4.6 Rozměry uložení

Zbývajících parametry, které potřebujeme k výpočtům, jsou momenty setrvačnosti motoru ke zbývajícím dvěma osám procházejících těžištěm. Tyto hodnoty bychom měřením jen těžko zjistili, problém by byl především v zavěšení motoru tak, aby mohl volně kmitat. Z tohoto důvodu si musíme vystačit s hodnotami vygenerovanými programem Inventor. Protože je však skutečné těžiště jinde než na modelu jsou použity alespoň přibližné korekce. Po porovnání změřené a modelové hodnoty momentu setrvačnosti ke stejné orientované těžištní ose se ukázalo, že změřená hodnota je přibližně o 10 % menší. Proto byly i zbývajících dvě hodnoty z modelu zmenšeny o 10 %, viz Tab. 4.3.

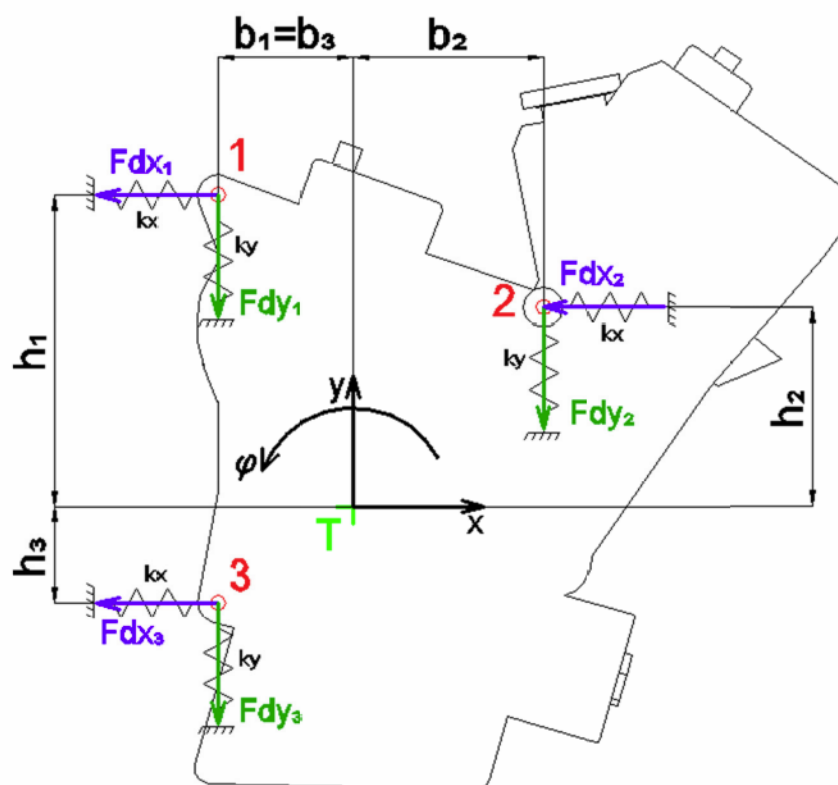
	Hodnoty z Inventoru [$kg \cdot m^2$]	Upravené hodnoty [$kg \cdot m^2$]
I_X	1,16	1,04
I_Y	1,03	0,92
I_Z	1,22	1,08

Tab. 4.3 Hodnoty momentů setrvačnosti

5. Modální analýza uložení – analytické řešení

5.1. Úvod

Modální analýza slouží k výpočtu vlastních tvarů a vlastních frekvencí tělesa nebo soustavy těles pružně uchycených k rámu. Podle počtu stupňů volnosti lze najít stejný počet vlastních tvarů a frekvencí, přičemž každému vlastnímu tvaru přísluší jedna vlastní frekvence. Budíme-li těleso nebo soustavu těles proměnnou silou na frekvenci blízkou vlastní frekvenci, dochází k jevu zvanému rezonance. Tento děj je u většiny strojů, ale i stavebních konstrukcí nežádoucí a nebezpečný. U netlumeného kmitání dochází k nárůstu výchylky tělesa nade všechny meze a u tlumeného kmitání dosahuje výchylka mnohonásobně větších hodnot, než jsou hodnoty přípustné. Vlastní tvar popisuje, jak těleso kmitá při vlastní frekvenci. Je to poměr výchylek v jednotlivých směrech, které jsou



Obr. 5.2 Zavedený souřadný systém a směrné síly

Nyní můžeme sestavit 3 pohybové rovnice – dvě pro posuvný pohyb a jednu pro rotační pohyb ve tvaru

$$\begin{aligned} m \cdot \ddot{x} &= \sum F_{ix} \\ m \cdot \ddot{y} &= \sum F_{iy} \\ I_T \cdot \ddot{\varphi} &= \sum M_{iT}. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Po dosazení do soustavy (5.2) dostaneme

$$\begin{aligned} m \cdot \ddot{x} &= -F_{Dx1} - F_{Dx2} - F_{Dx3} \\ m \cdot \ddot{y} &= -F_{Dy1} - F_{Dy2} - F_{Dy3} \\ I_T \cdot \ddot{\varphi} &= F_{Dx1} \cdot h_1 + F_{Dx2} \cdot h_2 - F_{Dx3} \cdot h_3 + F_{Dy1} \cdot b_1 \\ &\quad - F_{Dy2} \cdot b_2 + F_{Dy3} \cdot b_3. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Nyní musíme určit velikosti směrných sil. Jestliže se směrná síla určí podle vztahu

$$F_{Di} = k_i \cdot \Delta l_i, \quad (5.4)$$

kde k_i je tuhost pružiny v daném směru a Δl_i je velikost deformace pružiny, pak směrné síly pro náš případ budou mít tvar

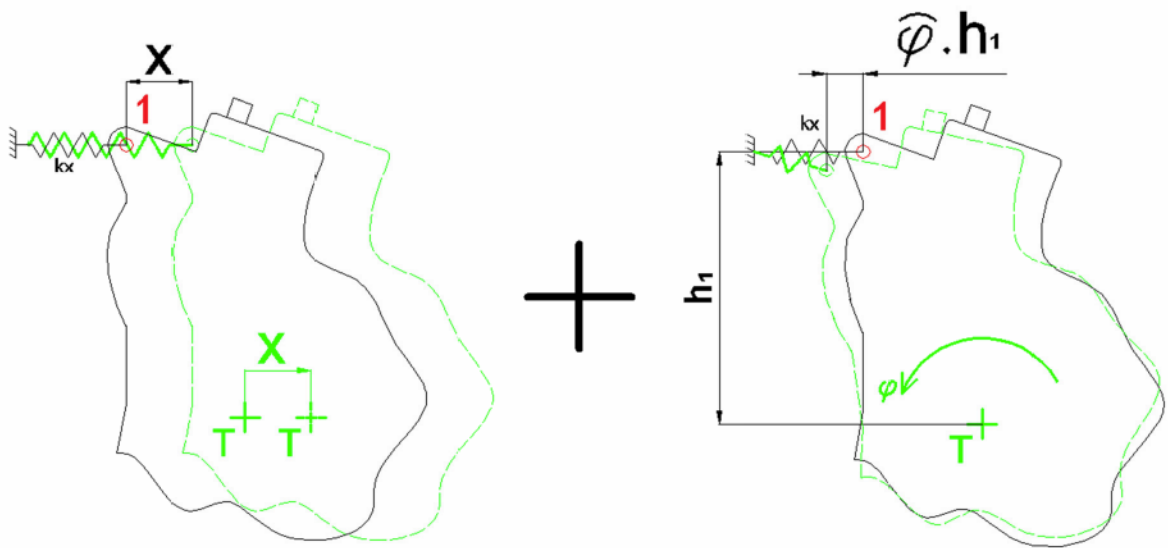
$$\begin{aligned}
 F_{Dx1} &= k_x \cdot (x - \varphi \cdot h_1) \\
 F_{Dx2} &= k_x \cdot (x - \varphi \cdot h_2) \\
 F_{Dx3} &= k_x \cdot (x + \varphi \cdot h_3) \\
 F_{Dy1} &= k_y \cdot (y - \varphi \cdot b_1) \\
 F_{Dy2} &= k_y \cdot (y + \varphi \cdot b_2) \\
 F_{Dy3} &= k_y \cdot (y - \varphi \cdot b_3).
 \end{aligned}
 \tag{5.5}$$

Stanovení velikosti výchylky je vysvětleno pro sílu F_{Dx1} .

Direkční síla F_{Dx1} byla zvolena jako tahová, to znamená, pokud se těleso bude pohybovat v kladném směru osy x , vznikne v pružině tahová síla. Tahová síla vznikne od prodloužení pružiny, které musíme určit. Jestliže má těleso 3 stupně volnosti, musíme odvodit prodloužení pružiny z kombinace pohybů ve třech směrech – v našem případě posuv ve směru os x a y a natočení o úhel φ . Na Obr. 5.3 je znázorněno, jak dojde při posuvu v kladném směru osy x k prodloužení a zároveň při natočení o úhel φ ke zkrácení pružiny. Při posuvu v ose y dojde jen k zanedbatelné změně délky, proto tuto složku neuvažujeme. Rovněž zanedbáme natočení celé pružiny při rotaci tělesa o úhel φ . Výsledné prodloužení pružiny je tedy

$$x - \varphi \cdot h_1,$$

kde φ je úhel natočení v radiánech.



Obr. 5.3 Určení výchylky pružiny

Dosazením rovnic (5.5) do soustavy (5.3) a vhodnými úpravami dostaneme výslednou soustavu pohybových rovnic

$$\begin{aligned}
 m \cdot \ddot{x} + 3 \cdot k_x \cdot x - k_x \cdot (h_1 + h_2 - h_3) \cdot \varphi &= 0 \\
 m \cdot \ddot{y} + 3 \cdot k_y \cdot y + k_y \cdot (-b_1 + b_2 - b_3) \cdot \varphi &= 0 \\
 I_T \cdot \ddot{\varphi} - k_x \cdot (h_1 + h_2 - h_3) \cdot x + k_y \cdot (-b_1 + b_2 - b_3) \cdot y \\
 + [k_x \cdot (h_1^2 + h_2^2 + h_3^2) + k_y \cdot (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)] \cdot \varphi &= 0.
 \end{aligned} \tag{5.6}$$

Pro maticový zápis a další výpočty si vypíšeme ze soustavy (5.6) matici hmot

$$M = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & I_T \end{bmatrix}, \tag{5.7}$$

matici tuhosti

$$K = \begin{bmatrix} 3 \cdot k_x & 0 & -k_x \cdot (h_1 + h_2 - h_3) \\ 0 & 3 \cdot k_y & k_y \cdot (-b_1 + b_2 - b_3) \\ -k_x \cdot (h_1 + h_2 - h_3) & k_y \cdot (-b_1 + b_2 - b_3) & [k_x \cdot (h_1^2 + h_2^2 + h_3^2) + k_y \cdot (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)] \end{bmatrix} \tag{5.8}$$

a vektor souřadnic

$$q = \begin{pmatrix} x \\ y \\ \varphi \end{pmatrix}. \tag{5.9}$$

5.2.2. Výpočet vlastních frekvencí a vlastních tvarů

Dalším krokem je samotná modální analýza. Pro jednoduché úlohy se dvěma až třemi stupni volnosti lze vypočítat vlastní frekvence a vlastní tvary ručně, pomocí frekvenčního determinantu. Ten nám pro 2 stupně volnosti vygeneruje kvadratickou rovnici a pro 3 stupně volnosti kubickou rovnici, jejichž kořeny jsou hledanými hodnotami. Pro složitější úlohy lze převést úlohu na tzv. zobecněný problém vlastních čísel ve tvaru

$$(K - \lambda \cdot M) \cdot c = 0, \tag{5.10}$$

případně na speciální problém vlastních čísel

$$(A - \lambda) \cdot c = 0, \tag{5.11}$$

kde $\lambda = \Omega^2$ je tzv. vlastní číslo, c je vlastní tvar a $A = M^{-1} \cdot K$.

Řešením dostaneme vlastní čísla a ke každému vlastnímu číslu přísluší jeden vlastní tvar. Samotné vlastní kruhové frekvence pak vypočteme jednoduše odmocněním vlastních čísel

$$\Omega = \sqrt{\lambda} \tag{5.12}$$

a vlastní frekvence

$$f = \frac{\Omega}{2 \cdot \pi}, \tag{5.13}$$

přičemž první vlastní frekvence je ta nejnižší.

Vlastní čísla řeší bez problému většina matematického software a v této práci byl využit program Mathcad 14. Kompletní výpis z programu Mathcad je uveden v příloze A.

Výpočtem dostaneme následující hodnoty vlastních frekvencí

$$f_1 = 40,968 \text{ Hz}$$

$$f_2 = 53,546 \text{ Hz}$$

$$f_3 = 70,999 \text{ Hz.}$$

Vlastní tvary jsou zapsány v matici vlastních tvarů tzv. modální matici

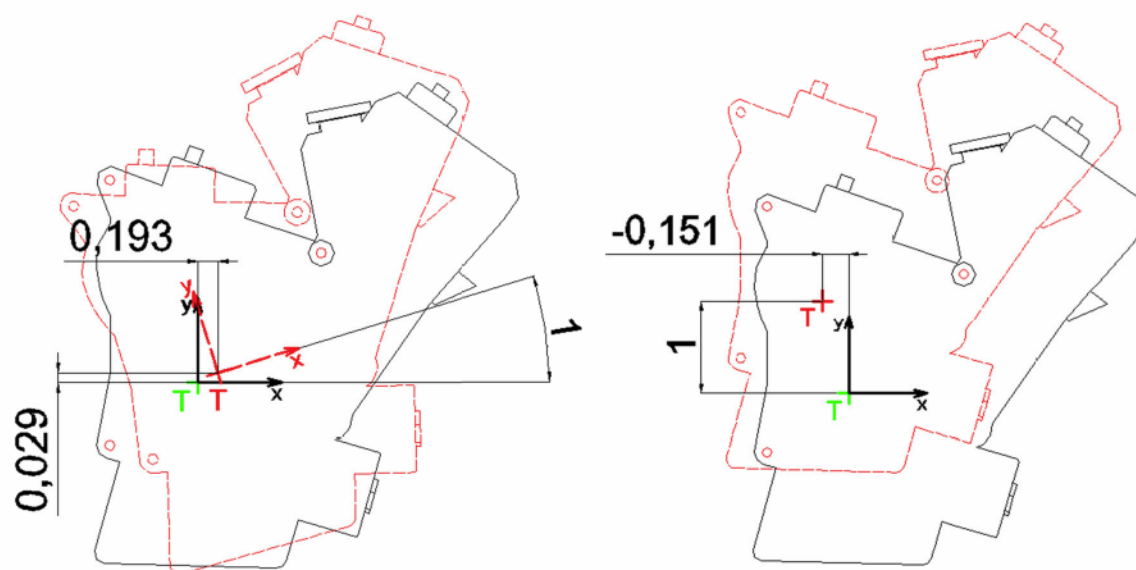
$$V = \begin{bmatrix} -0,189 & 0,149 & 0,105 \\ -0,028 & -0,989 & 0,016 \\ -0,982 & 0 & -0,994 \end{bmatrix},$$

přičemž jednotlivé sloupce odpovídají jednotlivým vlastním tvarům a řádky odpovídají souřadnicím x , y a φ .

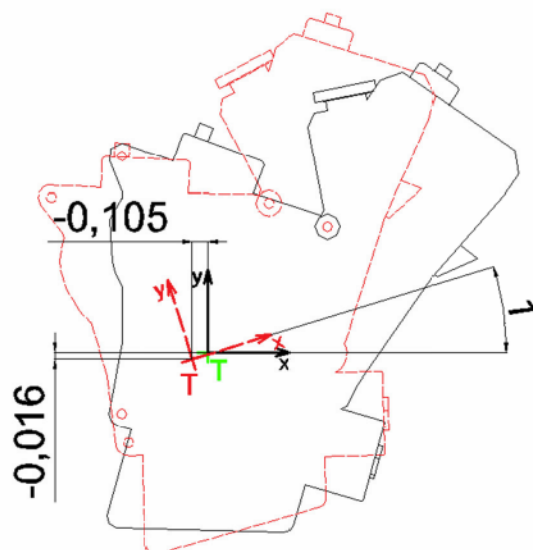
Informativní charakter však má až normovaná modální matice. Normování znamená, že vynásobíme celý sloupec stejným číslem. Můžeme použít normování podle matice hmot, či normování na jedničku. V našem případě využijeme normování na jedničku, tj. vynásobíme celý sloupec stejným číslem tak, aby nejvyšší číslo byla 1. Normovaná modální matice na jedničku bude vypadat následovně

$$V = \begin{bmatrix} 0,193 & -0,151 & -0,105 \\ 0,029 & 1 & -0,016 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Na Obr. 5.4 a 5.5 jsou demonstrovány všechny vlastní tvary. Jak již bylo řečeno, vlastní tvar je poměr výchylek, tzn., bude-li těleso kmitat např. na 2. vlastní frekvenci, bude nejvýraznější výchylka v kladném směru osy y a méně výrazná v záporném směru osy x v poměru 1: 0,151. K natočení při tomto vlastním tvaru nedochází.



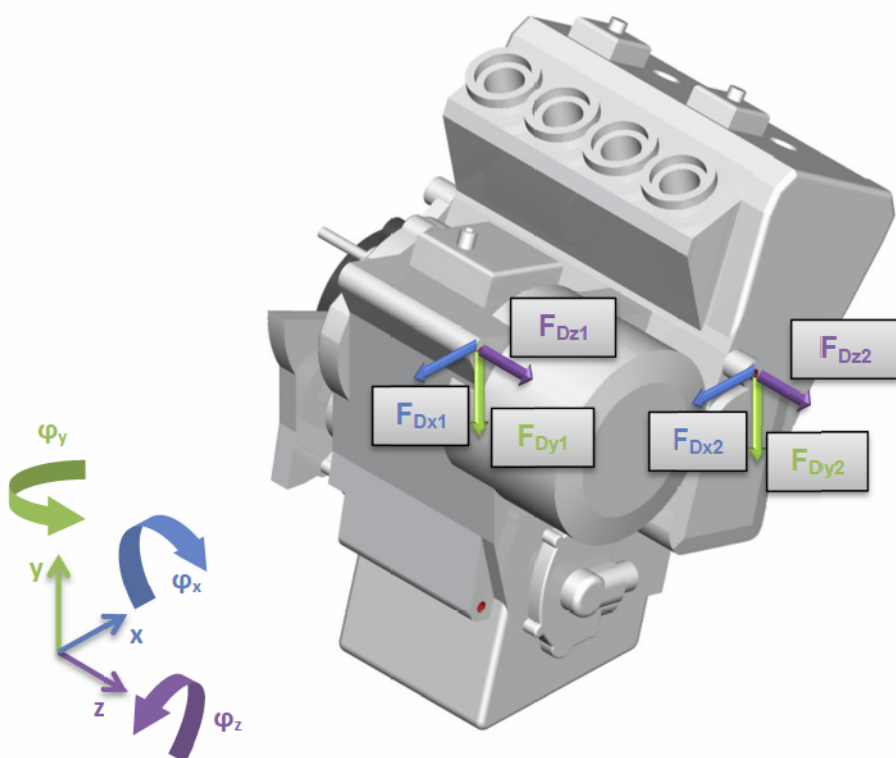
Obr. 5.4 Znáznornění 1. vlastního tvaru (vlevo) a 2. vlastního tvaru (vpravo)



Obr. 5.5 Znáznornění 3. vlastního tvaru

5.3. Řešení ve 3D

Výše byl popsán postup výpočtu vlastních frekvencí a vlastních tvarů pro rovinnou úlohu. Modální analýza motoru uloženého v prostoru se principiálně neliší a platí zde všechny předešlé úvahy a poznatky. Rozdíl je pouze v počtu stupňů volnosti. Zatímco těleso v rovině má 3 stupně volnosti, těleso v prostoru jich má 6 a to posuvy ve třech na sebe kolmých osách a rotace okolo těchto os. Ve výsledku to znamená nárůst dimenze matice hmot a matice tuhosti na 6x6. Kompletní matice a odvození je uvedeno v příloze B, na tomto místě jsou uvedeny pouze výsledky.



Obr. 5.6 Zavedení direkčních sil – pravá strana

Na Obr. 5.6 je znázorněno zavedení direkčních sil ve třech směrech v místech zavěšení motoru 1 a 2. Na levé straně motoru, v místech 4, 5 a 6 jsou směry direkčních sil stejné jako na pravé straně.

Po sestavení potřebných matic a výpočtu, dostaneme 6 vlastních frekvencí (Tab. 5.1)

	$f[Hz]$
1	21,723
2	39,961
3	68,018
4	77,487
5	84,854
6	122,287

Tab. 5.1 Vlastní frekvence

a 6 vlastních tvarů v modální matici normované na jedničku

$$V = \begin{bmatrix} 0,062 & 0,224 & -0,172 & 0,05 & -0,023 & -0,07 \\ -0,013 & -0,101 & -0,458 & 0,022 & -0,016 & 0,036 \\ 1 & -0,028 & 0,022 & 0,011 & -0,011 & 0,002 \\ -0,802 & -0,324 & 1 & 1 & -0,380 & 0,247 \\ 0,336 & 0,077 & -0,192 & 0,515 & 1 & 0,081 \\ 0,344 & 1 & -0,016 & -0,142 & -0,028 & 1 \end{bmatrix}$$

První řádek v modální matici odpovídá souřadnici x, druhý souřadnici y, třetí souřadnici z, čtvrtý natočení φ_x , pátý natočení φ_y a šestý odpovídá natočení φ_z . Animace vlastních tvarů jsou obsaženy na přiloženém CD v následujících umístěních:

Vlastní tvar	Název složky	Název souboru
1.	Vlastní tvary motoru	1.vlastní tvar.mpg
2.		2.vlastní tvar.mpg
3.		3.vlastní tvar.mpg
4.		4.vlastní tvar.mpg
5.		5.vlastní tvar.mpg
6.		6.vlastní tvar.mpg

Tab. 5.2 Umístění animací na CD

Pozn. Modální analýza je provedena pro variantu uložení s použitím silentbloků. U varianty bez silentbloků můžeme považovat uložení jako absolutně tuhé, tudíž zde modální analýza nemá význam.

6. Modální analýza uložení – MKP modelování

6.1. Úvod

V předchozí kapitole byly analyticky zjištěny hodnoty vlastních frekvencí vlastních tvarů motoru uloženého na silentblocích. Tento výpočet bude dále ověřen pomocí metody konečných prvků s využitím programu Patran pro přípravu modelu a post-processing a řešiče MSC Nastran.

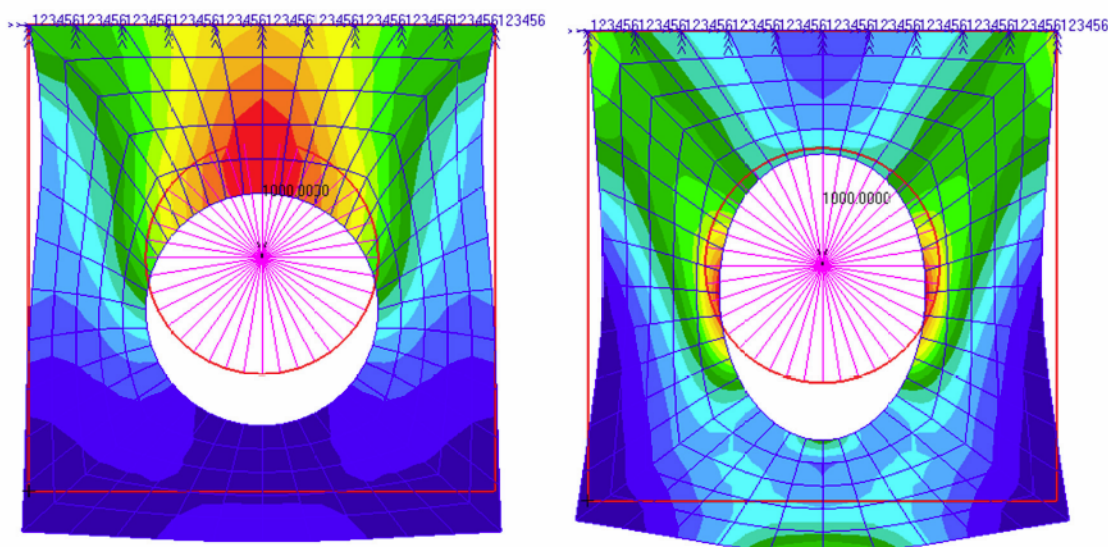
Model pro modální analýzu je v podstatě stejný jako výpočetní model pro analytické řešení. Tvoří ho hmotný bod (těžiště), jemuž jsou přiřazeny všechny hmotnostní parametry, tj. hmotnost a momenty setrvačnosti, a je spojen s pružnou vazbou pomocí MPC prvku.

6.2. MPC prvky

MPC, neboli Multipoint Constraint, někdy též tzv. R – prvky. Jedná se o speciální typy prvků, které definují určitým způsobem vazbu mezi dvěma či více uzly. V Patranu máme na výběr z následujících typů MPC prvků:

- Rigid (Fixed)
- RBAR
- RROD
- RBE1
- RBE2
- RBE3
- a další

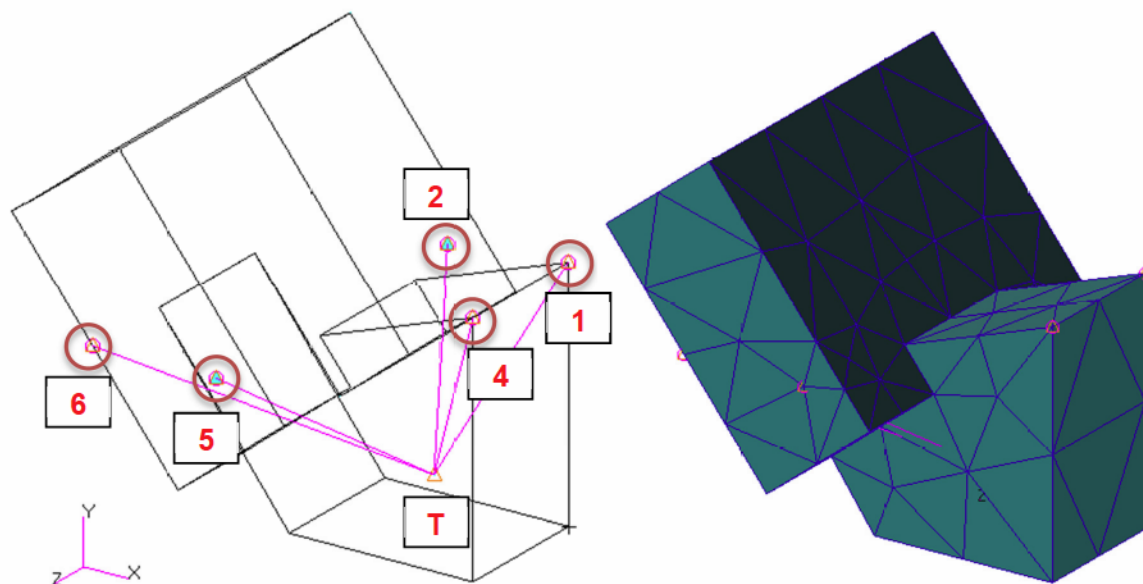
V modelu motoru pro modální analýzu je využit prvek RBE2. Tento typ MPC vytvoří tuhou vazbu mezi libovolným počtem uzlů, přičemž uživatel nadefinuje jeden nezávislý uzel, ke kterému pak napojí ostatní, závislé uzly. Zároveň je nutno specifikovat, které pohyby nezávislého uzlu budou svázány se závislými uzly. RBE3 prvek je podobný jako RBE2 s tím rozdílem, že mezi jedním nezávislým uzlem a ostatními vybranými uzly vytvoří deformovatelnou vazbu. Rozdíl je nejlépe vidět na příkladu, viz Obr. 6.1, kde je aplikace a srovnání prvků RBE2 a RBE3. V příkladu může MPC prvek reprezentovat např. čep v díře zatížený shora. Je vidět, že u prvku typu RBE2 si díra zachovala svůj původní tvar, což neodpovídá realitě, ale např. pro celkovou analýzu konstrukce, která je uložena pomocí čepů, můžeme tento prvek použít. Zajímá-li nás však konkrétně místo uložení, je vhodné použít prvek RBE3, u něhož už je deformace díry realističtější.



Obr. 6.1 Srovnání RBE2 (vlevo) a RBE3 (vpravo)

6.3. Model pro MKP výpočet

V případě modelu motoru je deformovatelná vazba nemyslitelná, jelikož považujeme blok motoru jako absolutně tuhé těleso. Proto je použit prvek RBE2, který spojí pevně hmotný bod – těžiště motoru s body zavěšení. Kolem těžiště byl vymodelován zjednodušený blok motoru. Ten nemá na výpočet žádný vliv a je zde pouze pro zviditelnění vlastních tvarů kmitání. Z tohoto důvodu je také možno použít hrubou síť konečných prvků, viz Obr. 6.2. Jsou však zachovány hlavní rozměry, tj. vzdálenosti bodů zavěšení od těžiště.



Obr. 6.2 Model motoru pro MKP výpočet

Model je k okolí uchyten pomocí kombinovaných prvků, které mají v Patranu označení CBUSH. Tomuto prvku byly přiřazeny lineární tuhosti dle katalogu (Obr. 3.9), a to v radiálních směrech (v ose x a y) 1962 N/mm a v axiálním směru (v ose z) 226 N/mm .

6.4. Modální analýza

Pro modální analýzu nabízí MSC Nastran několik způsobů výpočtu. Pro náš případ byl zvolen typ řešení s názvem „Normal modes“, který má v Nastranu označení SOL103 a je určen pro modální analýzu. Dále je možno zvolit metodu výpočtu vlastních čísel. Pro následující řešení byla zvolena Lanczosova metoda.

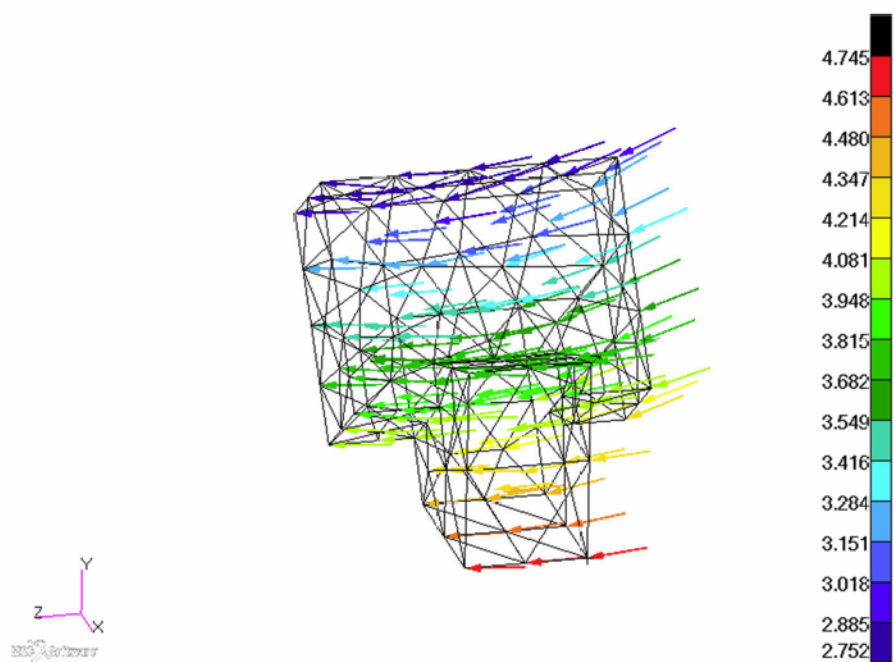
V tab. 6.1 jsou vypsané vypočtené hodnoty vlastních frekvencí a pro srovnání jsou vypsané i hodnoty vypočtené analyticky.

	$f_{MKP}[Hz]$	$f_{analyt.}[Hz]$
1	21,519	21,723
2	36,98	39,961
3	67,996	68,018
4	77,508	77,487
5	84,776	84,854
6	122,05	122,287

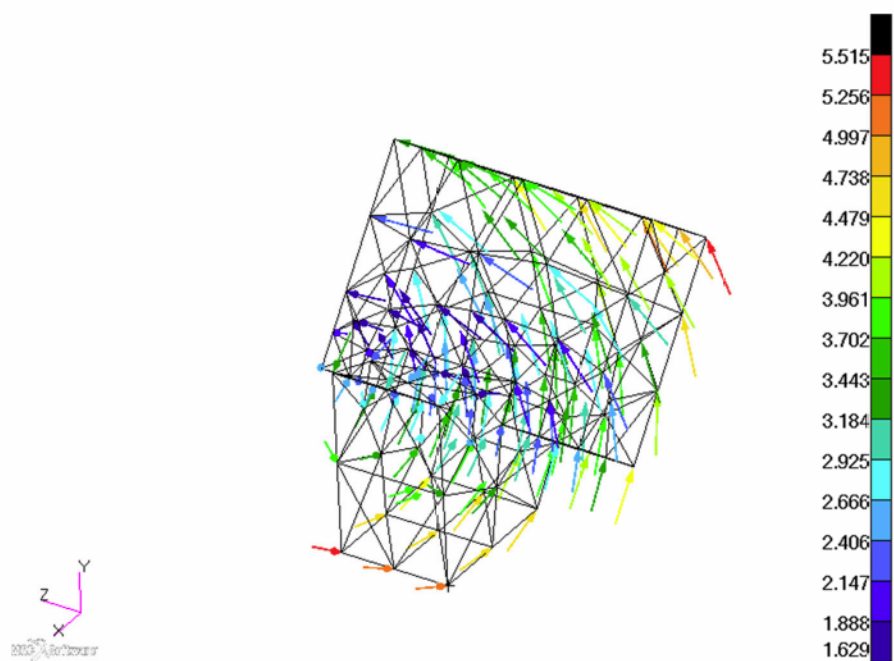
Tab. 6.1 Vlastní frekvence z MKP a analytického výpočtu

Je vidět, že hodnoty vypočtené analyticky i hodnoty získané pomocí MKP jsou téměř shodné a můžeme tedy model považovat za správný. Je nutno podotknout, že skutečný motor má více než jen 6 vlastních frekvencí. Těchto 6 vypočtených odpovídá vlastním tvarům, které jsou kombinací posuvů a natočení v daném souřadném systému a motor se při nich pohybuje jako tuhy celek. Další vlastní frekvence už by byly vyšší a odpovídají vlastním tvarům, při kterých dochází k deformaci samotného motoru. Pro naši úlohu si vystačíme s prvními šesti vlastními frekvencemi.

Vlastní tvary kmitání motoru zavěšeného na silentblocích jsou nejlépe vidět na animacích, které jsou obsaženy na přiloženém CD, viz Tab. 5.2. Zde jsou pro ukázkou zobrazeny první dva (Obr. 6.3 a 6.4). Šipky znázorňují směry kmitání a barevná škála je pro představu mocnosti výchylek.



Obr. 6.3 První vlastní tvar při frekvenci $f_1=21,519$ Hz – kmitání ve směru osy z, s mírným rotačním kmitáním okolo osy x

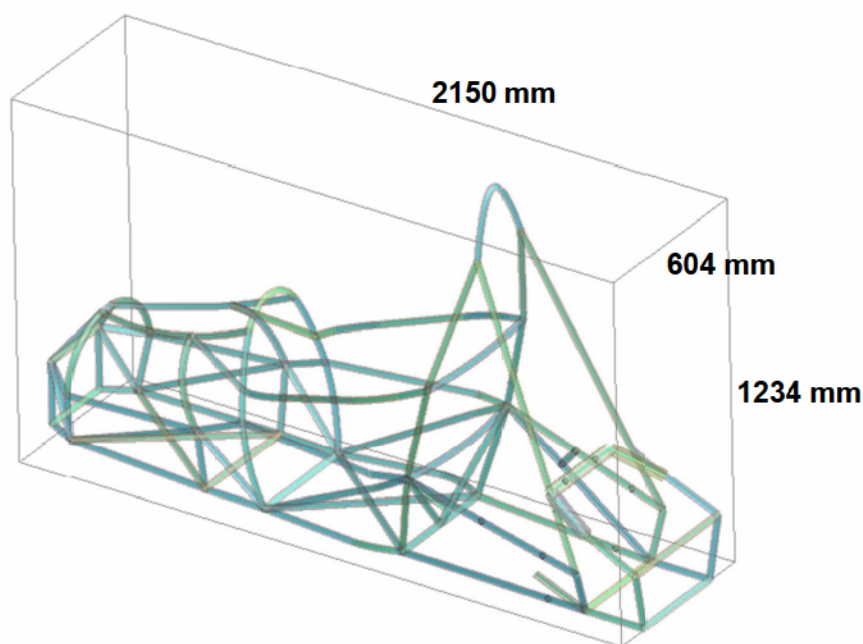


Obr. 6.4 Druhý vlastní tvar při frekvenci $f_2=36,98$ Hz – rotační kmitání okolo osy z, s mírným rotačním kmitáním okolo osy x

7. Modální analýza rámu

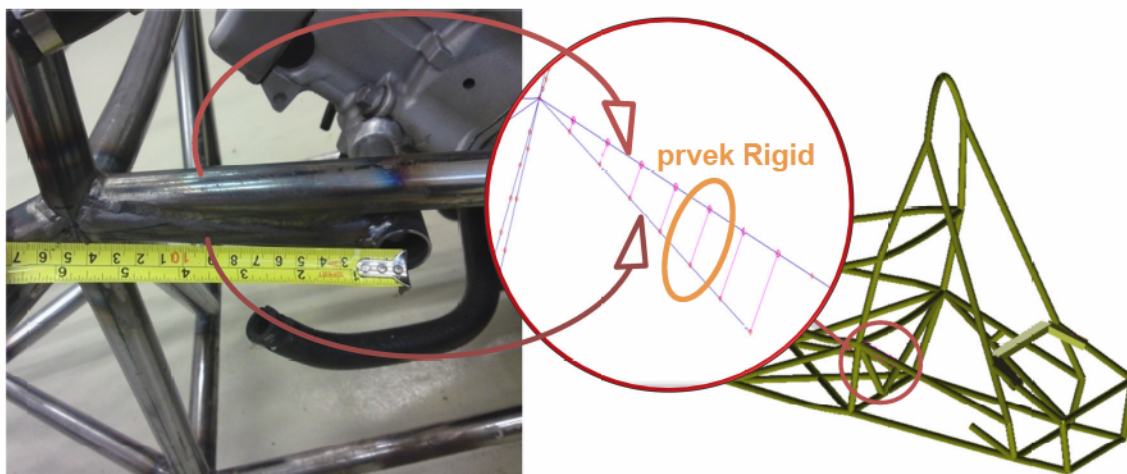
7.1. Model rámu

Pro další výpočty je využit drátový model rámu, který byl vytvořen v rámci jiné bakalářské práce. V tomto modelu však nebyla zahrnuta zadní nástavba, proto byla domodelována. Profily trubek jsou přiřazeny, viz kapitola 3. Hmotnost celého rámu i s nástavbou už nebyla vážena, modelová hmotnost je 34,3 kg při uvažované hustotě oceli $\rho = 7850 \text{ kg/m}^3$. Hlavní rozměry rámu jsou na Obr. 7.1. Síť konečných prvků je tvořena nosníkovými prvky, které jsou definovány kubickým aproximačním polynomem. Elementy mají délku 20 mm. Celý rám je tvořen 1724 elementy a 1670 uzly.



Obr. 7.1 Hlavní rozměry rámu

Pro přiblížení skutečnosti byly v modelu použity MPC prvky typu „Rigid“, viz Obr. 7.2. Tento prvek spojí dva uzly tuhou vazbou a sváže také pohyby obou uzlů, tzn., natočí-li se např. jeden uzel, druhý uzel s ním svázaný se natočí stejně. Takové prvky byly použity jako nahrazení svarů v místech, kde jsou trubky k sobě podélně přivařeny, a to na zadní nástavbě a v místě rozříznutí trubky, viz Obr. 7.2.



Obr. 7.2 Použití MPC Rigid prvku

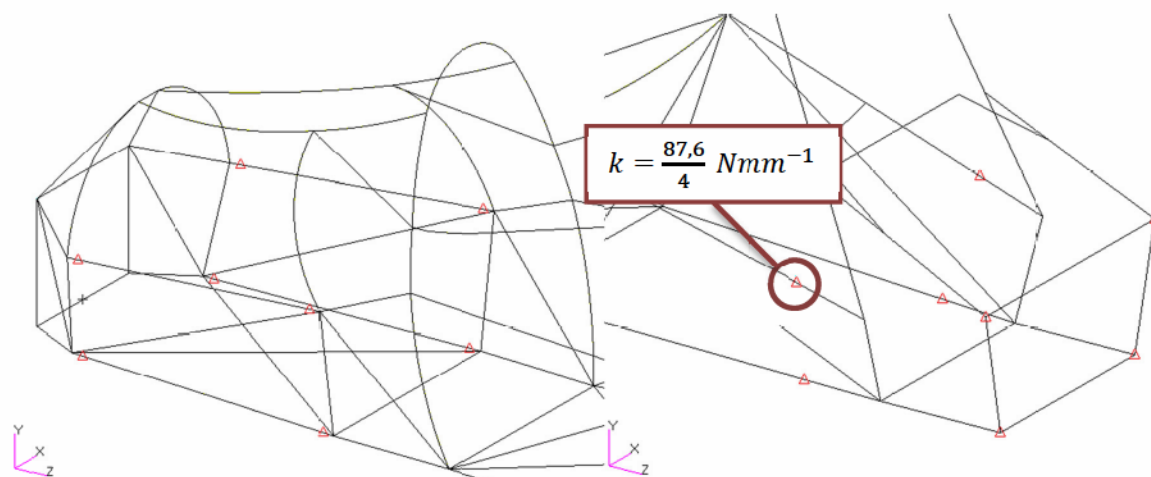
7.2. Uložení rámu

Na Obr. 7.3 je vidět celková konstrukce rámu bez kapotáže. Závěsy kol jsou k rámu připevněny pružně pomocí pružinového tlumiče Fox DHX 5.0. Tento tlumič je určen pro horská kola, ale hojně se využívá k zavěšení kol právě u studentských formulí typu SAE.



Obr. 7.3 Konstrukce se závěsy kol

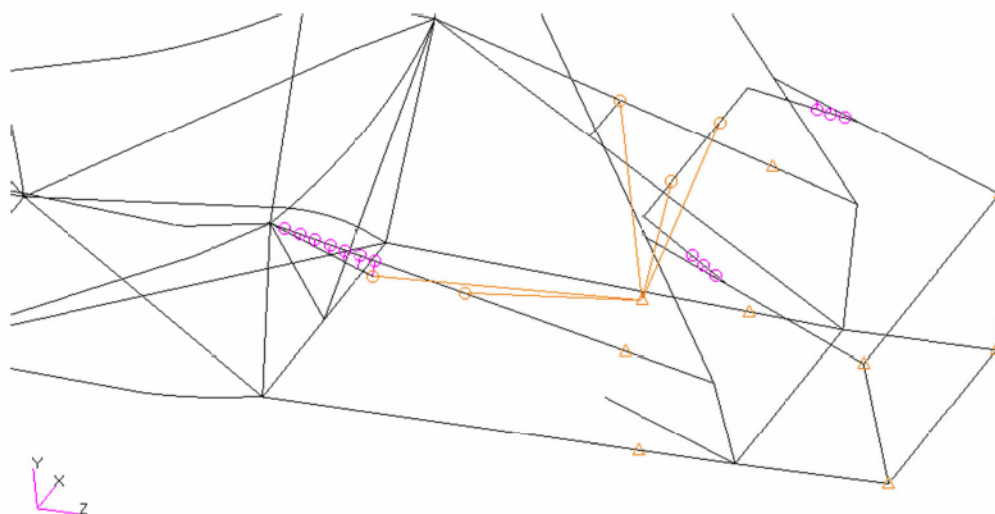
Označení pružiny 500x3.25 znamená tuhost $k = 500 \text{ lb/in}$ a po převedení jednotek do metrické soustavy $k = 87,6 \text{ N/mm}$. To je tuhost jednoho tlumiče. Skutečné pružné uložení je v modelu nahrazeno čtyřmi pružinami v každém místě zavěšení kol, přičemž každá pružina má čtvrtinovou tuhost z uvedených $87,6 \text{ N/mm}$. Pro modelování pružin byly využity opět prvky CBUSH s tuhostí pouze ve svislém směru, modelu je tedy povolen pohyb pouze ve směru osy y , viz Obr. 7.4.



Obr. 7.4 Uložení rámu na pružinách – přední část (vlevo) a zadní část (vpravo)

7.3. Modální analýza

Pro modální analýzu byl do modelu rámu umístěn hmotný bod, který reprezentuje těžiště motoru a je spojen s rámem pomocí MPC prvku. Zde už není modelován blok motoru. Samotná modální analýza rámu byla provedena pro 2 varianty. Model je na Obr. 7.5. Rozdíl je pouze v uchycení hmotného bodu k rámu. V prvním případě je napojen pomocí MPC prvku RBE2 přímo na rám a ve druhé variantě je mezi MPC a rámem pružný prvek CBUSH (silentblok) s přiřazenými tuhostmi v jednotlivých směrech. Pro obě varianty bylo spočítáno prvních 20 vlastních frekvencí a vlastních tvarů.



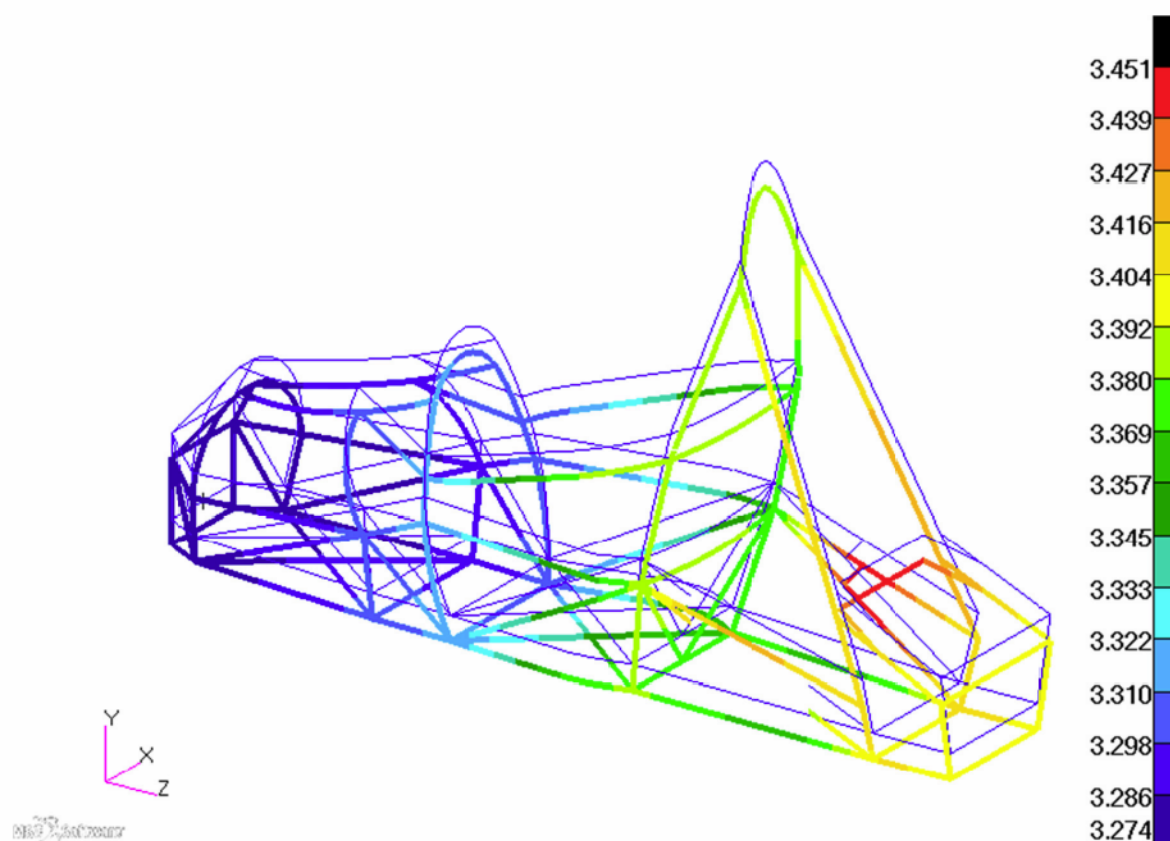
Obr. 7.5 MKP model zavěšení motoru

7.3.1. Rám s motorem zavěšeným bez silentbloků

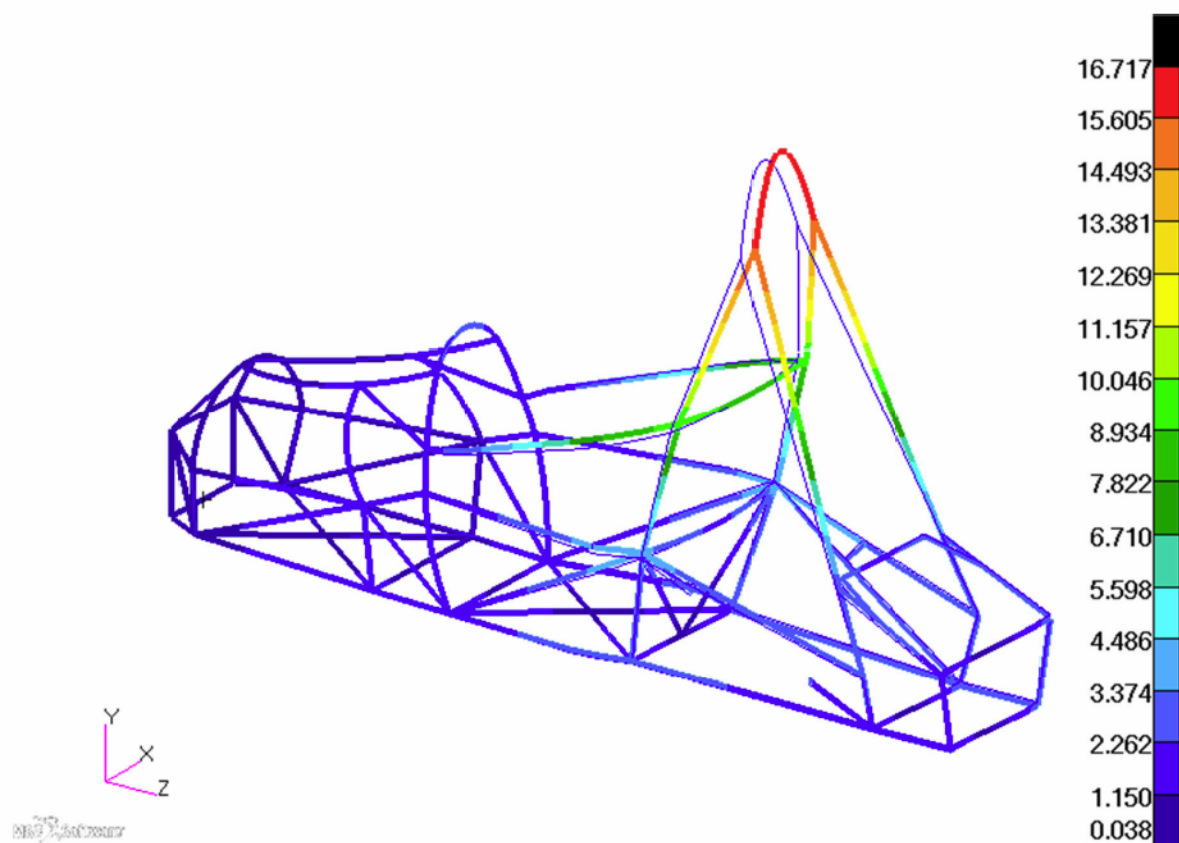
Modální analýza je provedena pro netlumenou soustavu, pro zjištění vlastních frekvencí a vlastních tvarů nemá tlumení význam. V Tab. 7.1 je uvedeno prvních 20 vlastních frekvencí. Na Obr. 7.6 a 7.7 jsou pak znázorněny první dva vlastní tvary kmitání. Všechny vlastní tvary jsou pak formou animací obsaženy na přiloženém CD. Umístění jednotlivých animací na CD je v Tab. 7.2.

	$f[Hz]$		$f[Hz]$		$f[Hz]$		$f[Hz]$
1	10,071	6	112,963	11	165,442	16	210,403
2	40,447	7	134,155	12	174,230	17	212,782
3	48,948	8	143,382	13	182,566	18	225,738
4	55,894	9	150,155	14	191,245	19	231,127
5	102,674	10	155,448	15	201,000	20	232,571

Tab. 7.1 Vlastní frekvence rámu s pevně zavěšeným motorem



Obr. 7.6 První vlastní tvar s vlastní frekvencí $f_1=10,071$ Hz – svislé kmitání především zadní části rámu



Obr. 7.7 Druhý vlastní tvar s vlastní frekvencí $f_2=40,447$ Hz – kmitání horního oblouku

Vlastní tvar	Název složky	Název souboru	Vlastní tvar	Název složky	Název souboru
1.	Vlastní tvary rámu s motorem bez silentbloků	1.vlastní tvar.mpg	11.	Vlastní tvary rámu s motorem bez silentbloků	11.vlastní tvar.mpg
2.		2.vlastní tvar.mpg	12.		12.vlastní tvar.mpg
3.		3.vlastní tvar.mpg	13.		13.vlastní tvar.mpg
4.		4.vlastní tvar.mpg	14.		14.vlastní tvar.mpg
5.		5.vlastní tvar.mpg	15.		15.vlastní tvar.mpg
6.		6.vlastní tvar.mpg	16.		16.vlastní tvar.mpg
7.		7.vlastní tvar.mpg	17.		17.vlastní tvar.mpg
8.		8.vlastní tvar.mpg	18.		18.vlastní tvar.mpg
9.		9.vlastní tvar.mpg	19.		19.vlastní tvar.mpg
10.		10.vlastní tvar.mpg	20.		20.vlastní tvar.mpg

Tab. 7.2 Umístění animací na CD

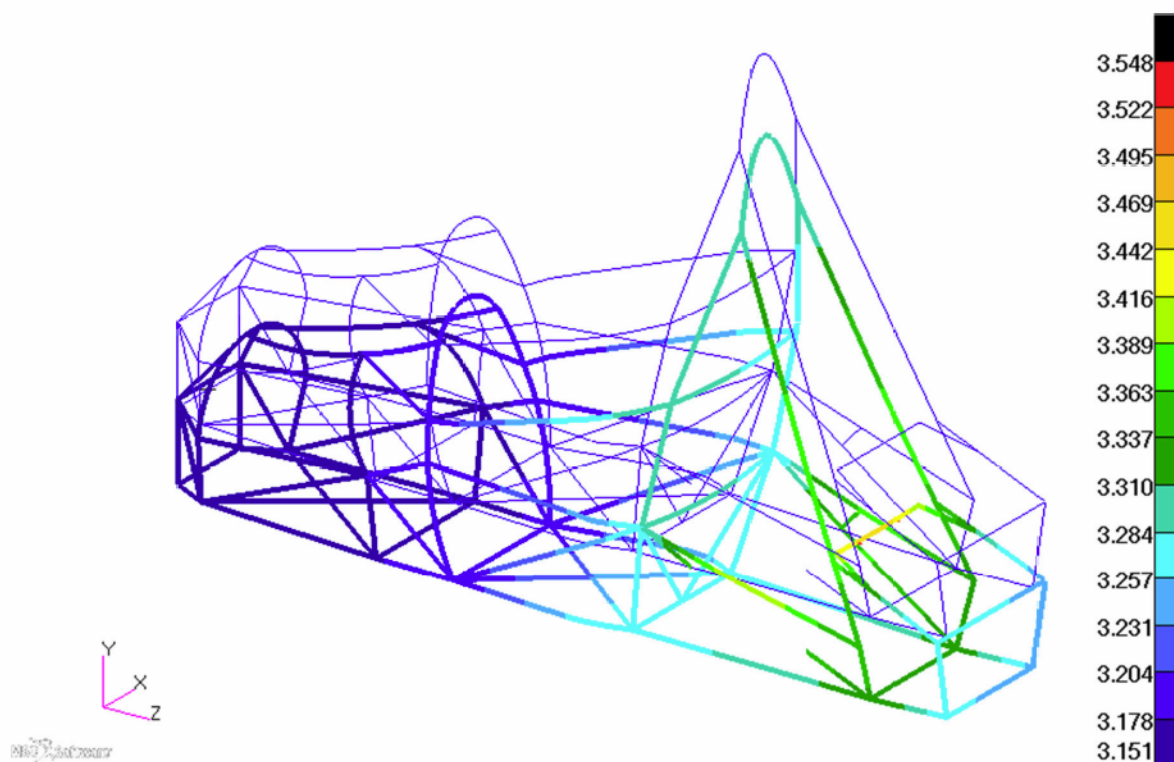
7.3.1. Rám s motorem zavěšeným na silentblocích

V Tab. 7.3 je uvedeno prvních 20 vlastních frekvencí. Na Obr. 7.8 a 7.9 jsou znázorněny opět první dva vlastní tvary kmitání. Všechny vlastní tvary jsou pak rovněž formou animací obsaženy v příloze C. Jejich umístění na CD je v Tab. 7.4.

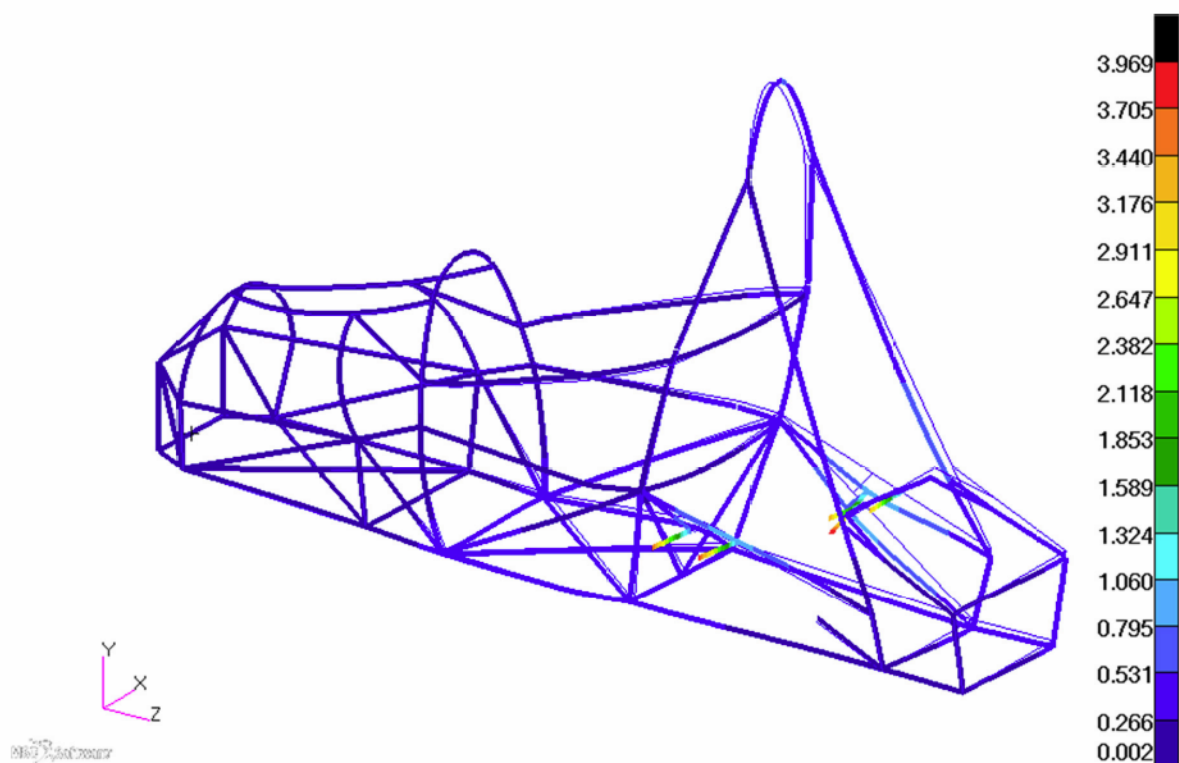
	$f[\text{Hz}]$		$f[\text{Hz}]$		$f[\text{Hz}]$		$f[\text{Hz}]$
1	9,905	6	66,392	11	121,400	16	166,887
2	19,908	7	90,764	12	142,798	17	173,391
3	30,673	8	98,177	13	150,216	18	176,156
4	37,171	9	112,637	14	154,354	19	183,095
5	50,743	10	117,869	15	157,104	20	205,293

Tab. 7.3 Vlastní frekvence rámu s pružně zavěšeným motorem

Z hodnot pro oba způsoby zavěšení je vidět, že vlastní frekvence pro rám s motorem zavěšeným bez silentbloků jsou větší. To svědčí o větší tuhosti celého rámu při použití zavěšení bez tlumících prvků.



Obr. 7.8 První vlastní tvar s vlastní frekvencí $f_1=9,905$ Hz – svislé kmitání především zadní části rámu



Obr. 7.9 Druhý vlastní tvar s vlastní frekvencí $f_2=19,908$ Hz- kmitání motoru v ose x, zde zobrazeno jako deformace silentbloků

Vlastní tvar	Název složky	Název souboru	Vlastní tvar	Název složky	Název souboru
1.	Vlastní tvary rámu s motorem se silentbloky	1.vlastní tvar.mpg	11.	Vlastní tvary rámu s motorem se silentbloky	11.vlastní tvar.mpg
2.		2.vlastní tvar.mpg	12.		12.vlastní tvar.mpg
3.		3.vlastní tvar.mpg	13.		13.vlastní tvar.mpg
4.		4.vlastní tvar.mpg	14.		14.vlastní tvar.mpg
5.		5.vlastní tvar.mpg	15.		15.vlastní tvar.mpg
6.		6.vlastní tvar.mpg	16.		16.vlastní tvar.mpg
7.		7.vlastní tvar.mpg	17.		17.vlastní tvar.mpg
8.		8.vlastní tvar.mpg	18.		18.vlastní tvar.mpg
9.		9.vlastní tvar.mpg	19.		19.vlastní tvar.mpg
10.		10.vlastní tvar.mpg	20.		20.vlastní tvar.mpg

Tab. 7.4 Umístění animací na CD

8. Harmonická analýza

8.1. Úvod

Úkolem harmonické analýzy je zjištění odezvy tělesa nebo soustavy těles na proměnnou budící sílu. Pro netlumenou soustavu jde o řešení rovnice

$$M \cdot \ddot{q} + K \cdot q = f, \quad (8.1)$$

kde vektor budících sil

$$f = \begin{Bmatrix} F_{1a} \\ \vdots \\ F_{na} \end{Bmatrix} \cdot \sin(\omega t). \quad (8.2)$$

Dosadíme-li pak

$$q = q_a \cdot \sin(\omega t) \quad (8.3)$$

a

$$\ddot{q} = -q_a \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega t), \quad (8.4)$$

dostaneme nakonec rovnici

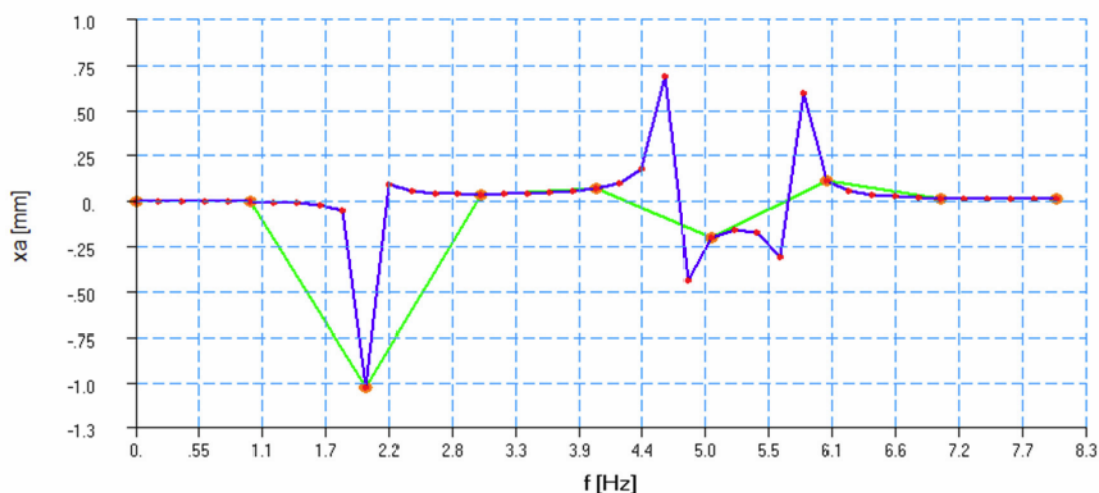
$$(K - \omega^2 \cdot M) \cdot q_a = f_a, \quad (8.5)$$

neboli

$$K_{dyn} \cdot q_a = f_a, \quad (8.6)$$

kde K_{dyn} je dynamická matice tuhosti, q_a je vektor amplitud výchylek a f_a je vektor amplitud zatěžujících sil. ω je zde kruhová frekvence budící síly.

V rovnici (5.19) je neznámou vektor q_a , tudíž řešením harmonické analýzy jsou velikosti amplitud kmitání při určité frekvenci budící síly. Počet a směry těchto výchylek závisí na stupních volnosti. Zajímá-li nás průběh odezvy tělesa na buzení v určitém rozsahu frekvencí, sestavíme tzv. amplitudovou charakteristiku. Tu získáme, vypočteme-li amplitudy výchylek pro určitý počet frekvencí v daném rozsahu a sestojíme graf závislosti amplitudy kmitání na frekvenci. Velikost kroku, s kterým v intervalu postupujeme, zásadně ovlivňuje přesnost a vypovídací hodnotu amplitudové charakteristiky. Je vhodné volit poměrně malý krok, abychom zachytili všechny případné špičky (rezonance). Názorný příklad amplitudové charakteristiky pro těleso se třemi stupni volnosti, jehož vlastní frekvence jsou $f_1 = 2 \text{ Hz}$, $f_2 = 4,7 \text{ Hz}$ a $f_3 = 5,7 \text{ Hz}$ je na Obr. 8.1. Amplitudová charakteristika je řešena na intervalu 0 – 8 Hz. Zelenou křivku dostaneme, rozdělíme-li interval na 8 dílů, tzn., krok je 1 Hz. Modrá křivka je pro krok 0,2 Hz. Je patrné, že křivka s krokem 1 Hz vystihuje jen první rezonanční frekvenci, která je zde právě 2 Hz, jinak by se ani ta nezobrazila. Křivka s menším krokem už zobrazuje amplitudy kmitání na všech třech rezonančních frekvencích. Nutno podotknout, že ani zde není zobrazení zcela přesné. S krokem 0,2 Hz vypočteme hodnotu amplitudy např. pro 4,6 Hz a 4,8 Hz ale nikoliv už přímo pro rezonanční frekvenci 4,7 Hz.



Obr. 8.1 Amplitudová charakteristika

Známe-li amplitudy vychylek, můžeme spočítat sílu přenesenou přes pružinu a případně tlumič do základu. Vzorec má obdobný tvar jako rovnice (5.16) pro výpočet výchylky v čase, a to

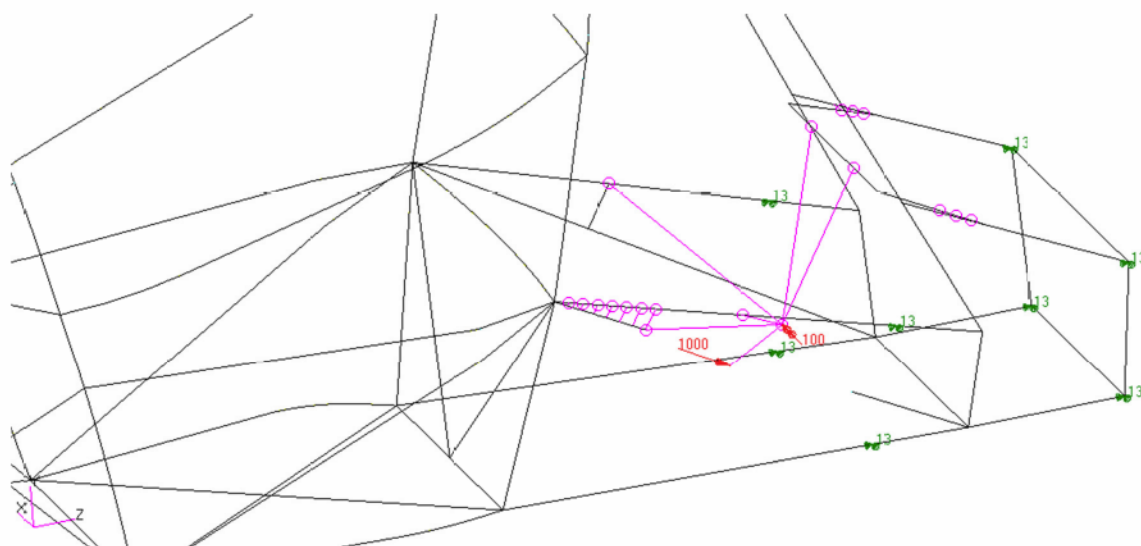
$$R = R_a \cdot \sin(\omega t - \varphi), \quad (8.7)$$

kde φ je fázový posuv oproti budící síle a amplituda reakce přenesené do základu pro jeden stupeň volnosti

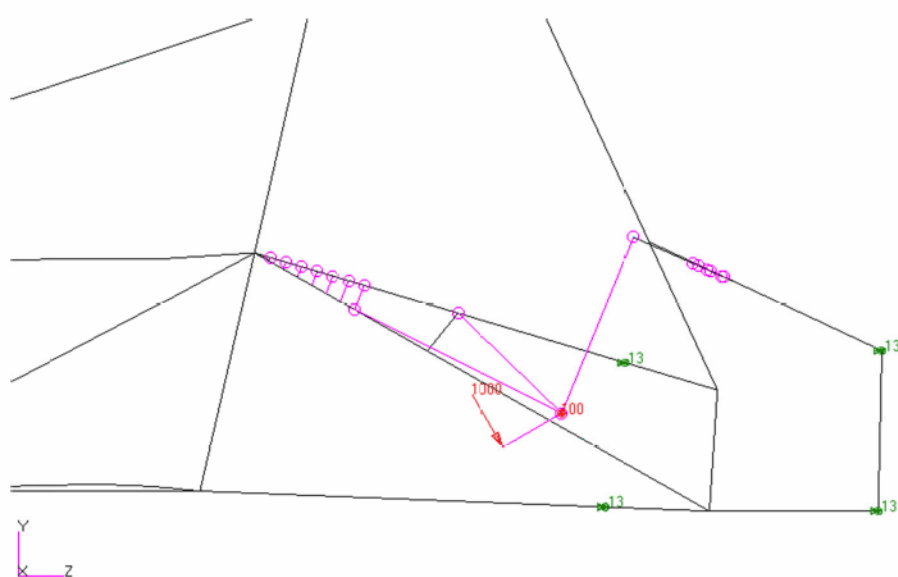
$$R_a = \sqrt{(b \cdot x_a \cdot \omega)^2 + (k \cdot x_a)^2}. \quad (8.8)$$

8.2. Model a okrajové podmínky pro MKP

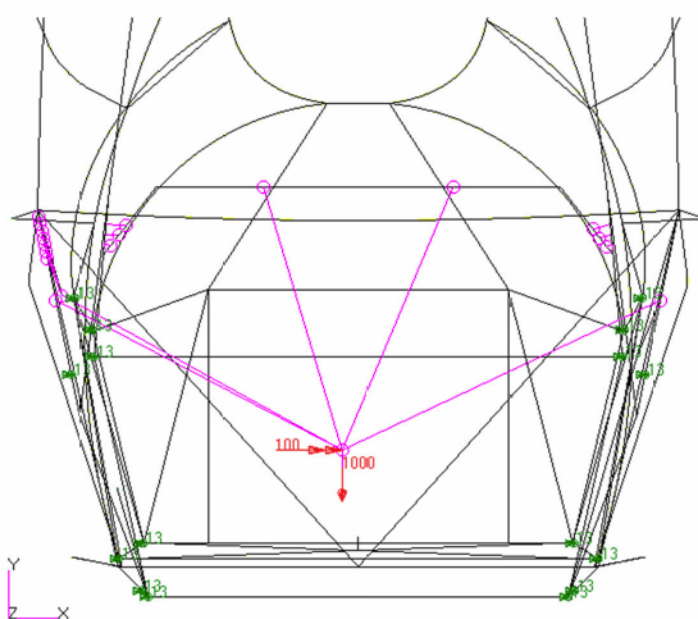
Model pro harmonickou analýzu pomocí MKP je stejný jako model pro modální analýzu. Přibudou zde však okrajové podmínky ve formě zatěžujících sil a momentů. Po konzultaci byla zavedena síla, která představuje setrvačnou sílu od posuvného pohybu pístů a dále pak moment, který představuje setrvačný moment klikové hřídele. Velikosti těchto zatížení nejsou známy, ale jelikož úkolem této práce není výpočet konkrétních hodnot, ale porovnání dvou způsobů zavěšení, byly tyto hodnoty zadány tzv. jednotkově. Konkrétně je to $F_a = 1000 \text{ N}$ a $M_a = 100 \text{ Nm}$. Směry a působiště zatížení jsou na Obr. 8.2. až 8.4.



Obr. 8.2 Zavedení setrvačných účinků



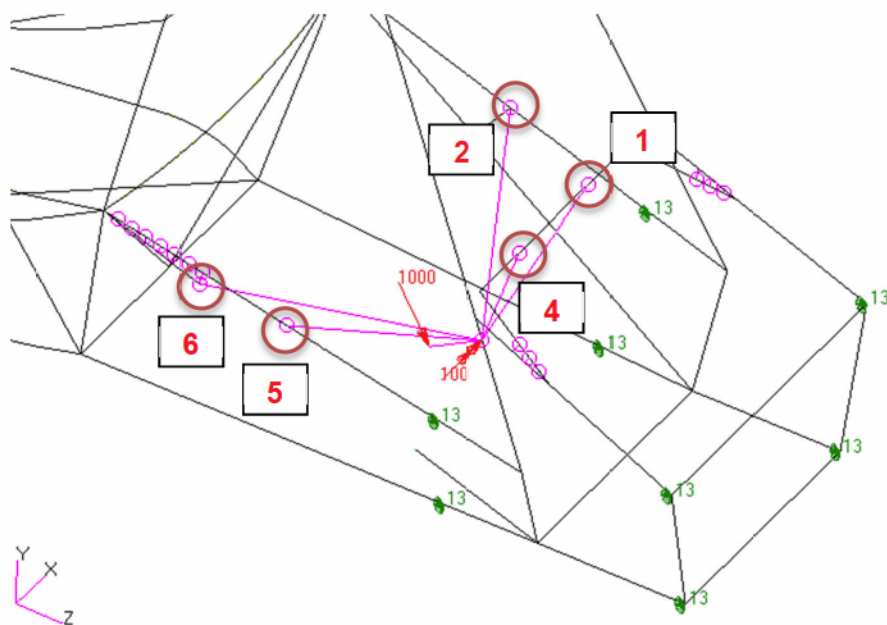
Obr. 8.3 Zavedení setrvačných účinků – pohled z boku



Obr. 8.4 Zavedení setrvačných účinků – pohled zezadu

8.3. Výpočet

Pro porovnání obou typů zavěšení jsou použity amplitudové charakteristiky. Jako budící frekvence je zde frekvence otáčková, která se pohybuje přibližně v rozmezí 0 – 217 Hz, což odpovídá provozním otáčkám 0 – 13 000 ot/min. Interval 0 – 217 Hz je pro výpočet rozdělen na 300 dílů, tzn., velikost jednoho kroku odpovídá přibližně 0,72 Hz. Do výpočtu je zahrnuto rovněž tlumení. Jde o tlumení celé soustavy a má hodnotu $0,01 \text{ Nm}^{-1}\text{s}$. Výsledné amplitudové charakteristiky jsou vykresleny pro 5 bodů zavěšení a zobrazují velikosti sil přenášených od motoru na rám v závislosti na budící frekvenci.

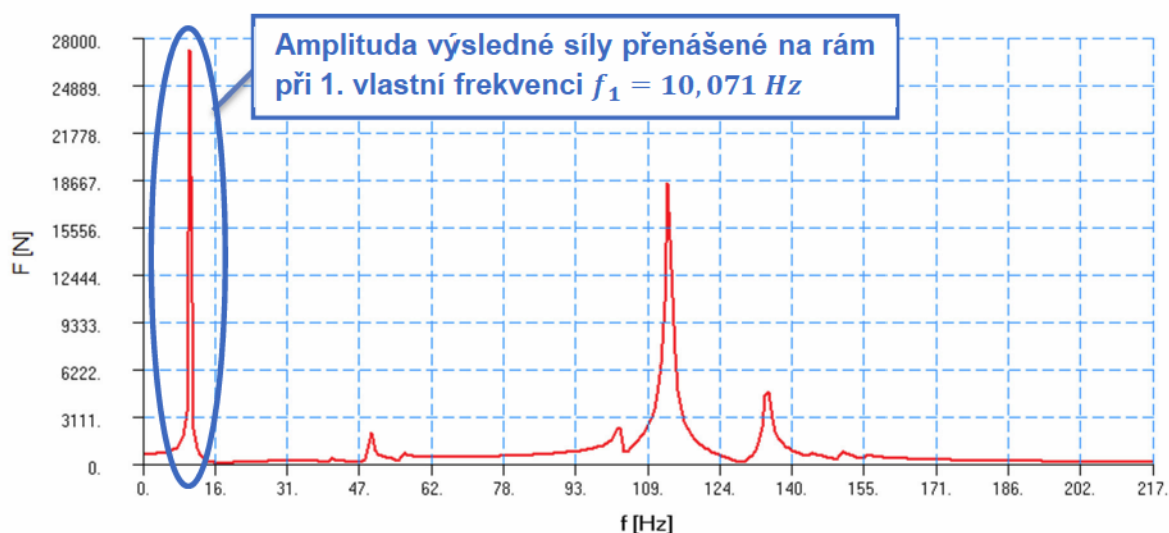


Obr. 8.5 Body zavěšení

8.3.1. Motor zavěšený bez silentbloků

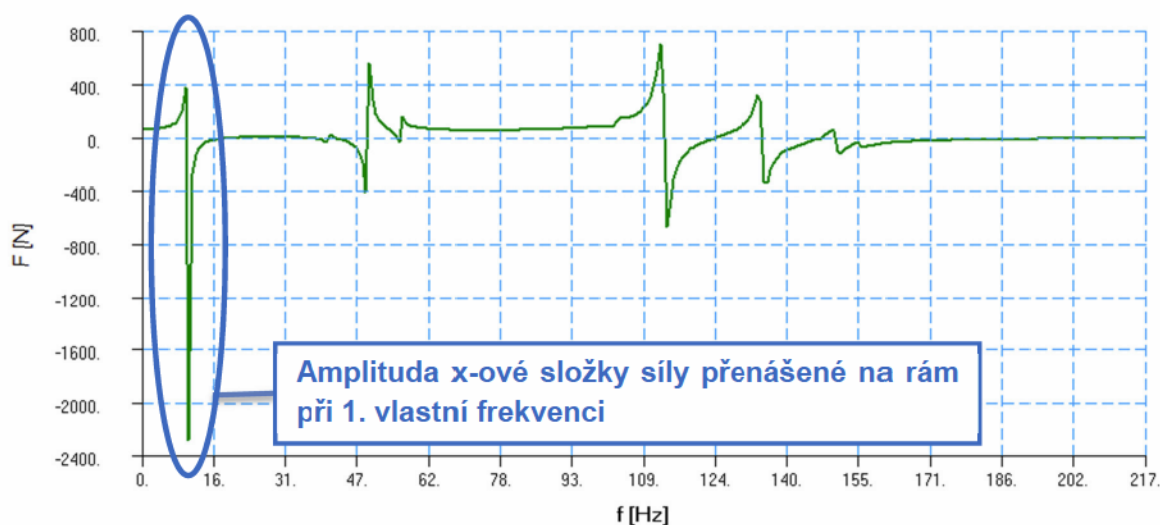
Na Obr. 8.6 je zobrazena amplitudová charakteristika výsledné síly přenášené od vibrací motoru na rám v závislosti na otáčkové frekvenci v bodě zavěšení č. 6. Výslednice je zobrazena v absolutní hodnotě.

Jednotlivé špičky v grafech nalezneme na vypočtených rezonančních frekvencích pro daný typ zavěšení. Pro rám s motorem zavěšeným bez silentbloků je např. první vlastní frekvence $f_1 = 10,07 \text{ Hz}$. Jak je vidět z grafu, první špička se nachází rovněž v blízkosti budící frekvence o velikosti 10 Hz. Při buzení s touto frekvencí dochází ke kmitání s prvním vlastním tvarem. Podíváme-li se na hodnoty vlastních frekvencí, viz Tab. 7.1 a porovnáme je s frekvencemi, na kterých se nachází špičky v grafech, zjistíme, že amplitudy sil na některých frekvencích nejsou tak výrazné, nebo jsou úplně utlumené. Utlumení se projeví především na vyšších frekvencích. V našem případě lze nalézt poslední výraznou špičku na 7. vlastní frekvenci, tj. při 134,155 Hz.



Obr. 8.6 Absolutní hodnota výslednice sil přenášených na rám v bodě 6

Jak již bylo řečeno, na Obr. 8.6 je vykreslen průběh výslednice sil. Jednotlivé složky ve směrech os souřadného systému jsou vykresleny na Obr. 8.7 až 8.9. Podíváme-li se blíže na první špičku v grafu na Obr. 8.6 a její jednotlivé složky na Obr. 8.7 až 8.9, zjistíme, že nejvýraznější jsou složky v ose y a v ose z, tzn., výslednice bude ležet přibližně v rovině y – z.



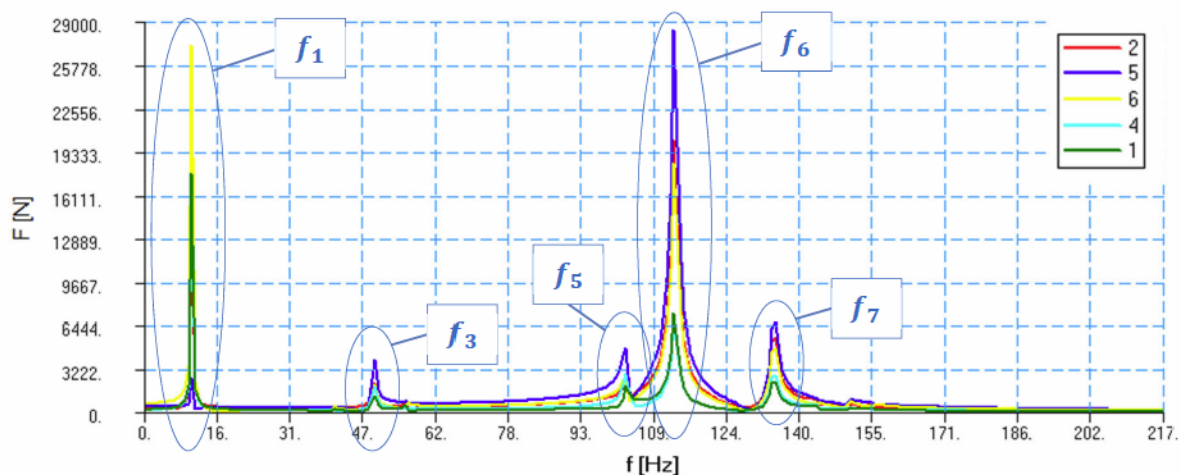
Obr. 8.7 Složka přenášené síly ve směru osy x



Obr. 8.8 Složka přenášené síly ve směru osy y



Obr. 8.9 Složka přenášené síly ve směru osy z



Obr. 8.10 Průběh amplitud sil ve všech bodech zavěšení

V grafu na Obr. 8.10 jsou vykresleny průběhy amplitud sil ve všech bodech zavěšení. Je patrné, že největší síla se na rám přenáší při první vlastní frekvenci ($f_1 = 10,071 \text{ Hz}$) a při šesté vlastní frekvenci ($f_6 = 112,963 \text{ Hz}$). Na těchto dvou frekvencích dosahují amplitudy přenesené síly hodnot okolo 27 000 N. Další výrazné amplitudy jsou při třetí,

páté a sedmé vlastní frekvenci. V Tab. 8.1 jsou vyznačeny vlastní frekvence, které se v amplitudové charakteristice projevují a ty, které jsou utlumeny.

	$f[Hz]$		$f[Hz]$		$f[Hz]$		$f[Hz]$
1	10,071	6	112,963	11	165,442	16	210,403
2	40,447	7	134,155	12	174,230	17	212,782
3	48,948	8	143,382	13	182,566	18	225,738
4	55,894	9	150,155	14	191,245	19	231,127
5	102,674	10	155,448	15	201,000	20	232,571

Tab. 8.1 Nalezené vlastní frekvence (zeleně) a utlumené (červeně)

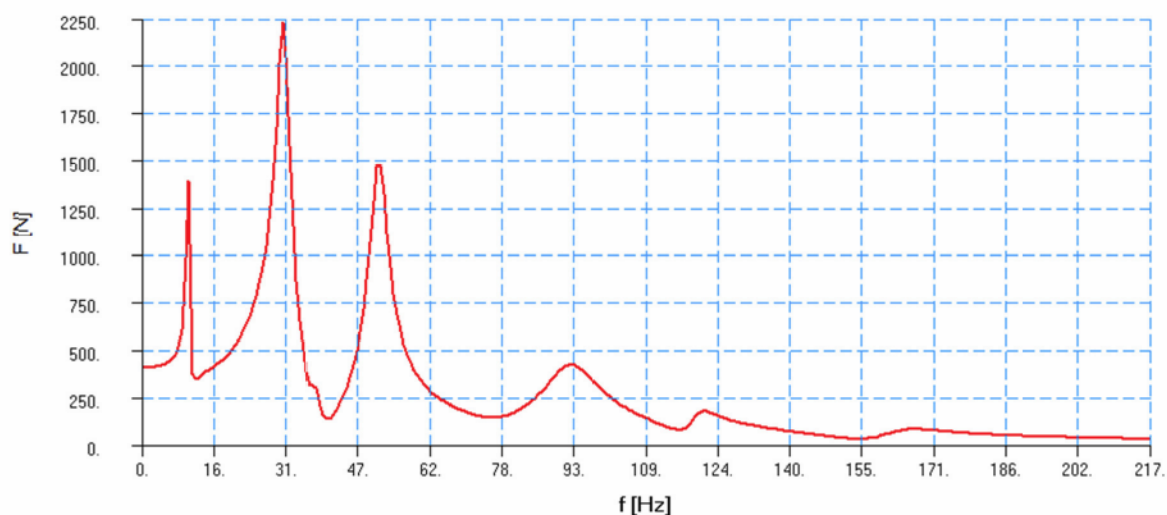
Pro porovnání tvarů kmitání na výše vyznačených frekvencích s vlastními tvary jsou v příloze C uvedeny animace v umístěních dle Tab. 8.2.

$f[Hz]$	Název složky	Název souboru
10,071	Harmonická analýza – zavěšení bez silentbloků	buzení na 1.vlastní frekvenci.mpg
48,948		buzení na 3.vlastní frekvenci.mpg
102,674		buzení na 5.vlastní frekvenci.mpg
112,963		buzení na 6.vlastní frekvenci.mpg
134,155		buzení na 7.vlastní frekvenci.mpg

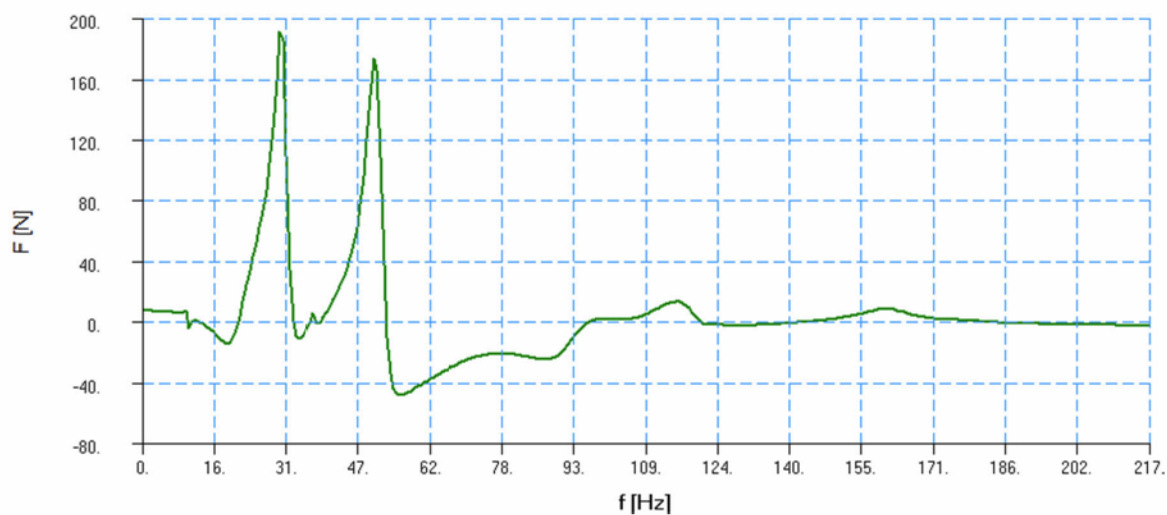
Tab. 8.2 Umístění animací na CD

8.3.1. Motor zavěšený na silentblocích

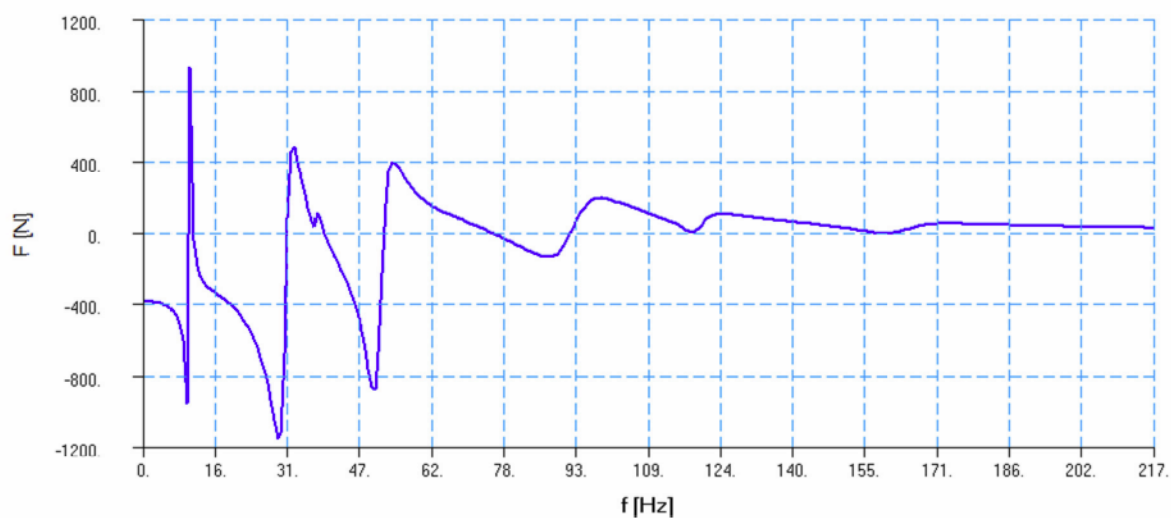
Amplitudová charakteristika u zavěšení se silentbloky je poněkud odlišná od první varianty. Platí zde všechny poznatky jako u předchozích, avšak průběhy jsou jiné. Na Obr. 8.11 je amplitudová charakteristika výsledné síly přenášené od motoru na rám v bodě zavěšení č. 6, tedy ve stejném bodě jako na Obr. 8.6. Špičky amplitud se zde projevují na podobných frekvencích, a sice na první, třetí a páté vlastní frekvenci (viz Tab. 7.2). Další zvýšení amplitudy je patrné na 7. a 11. vlastní frekvenci, ale oproti prvním třem špičkám jsou tyto zanedbatelné. Jednotlivé složky výsledné síly v bodě 6 jsou na Obr. 8.12 až 8.14.



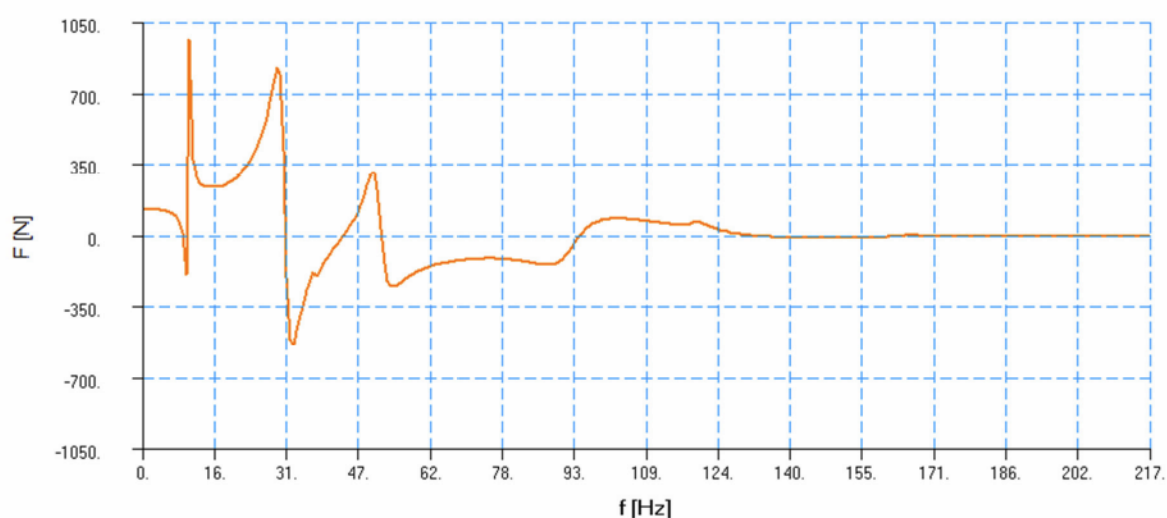
Obr. 8.11 Absolutní hodnota výslednice sil přenášených na rám v bodě 6



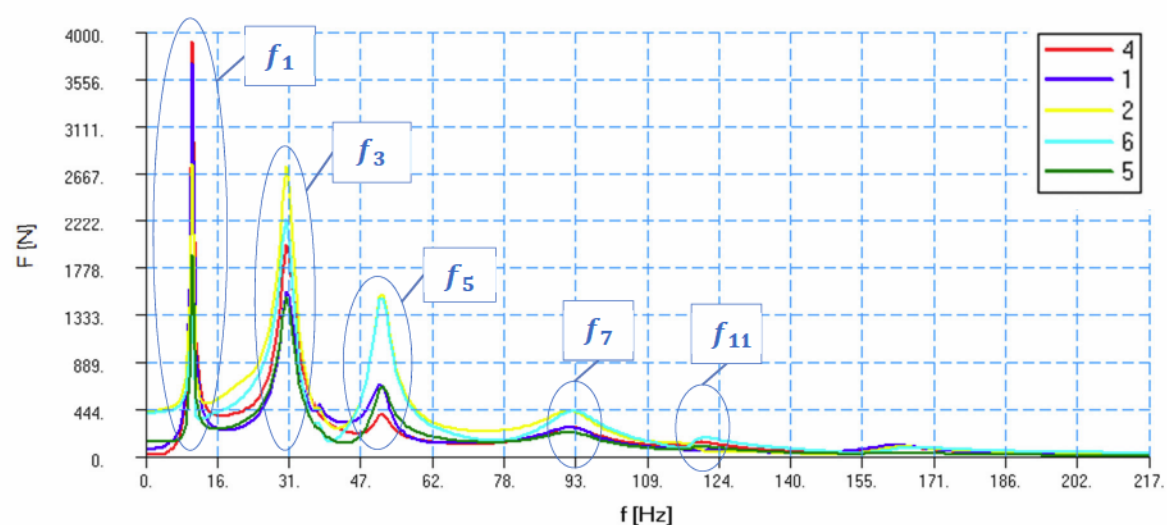
Obr. 8.12 Složka přenášené síly ve směru osy x



Obr. 8.13 Složka přenášené síly ve směru osy y



Obr. 8.14 Složka přenášené síly ve směru osy z



Obr. 8.15 Průběh amplitud sil ve všech bodech zavěšení

Z grafu na Obr. 8.15 je patrné, že největší síla se na rám přenáší při první vlastní frekvenci ($f_1 = 9,905 \text{ Hz}$). Hodnota amplitudy přenesené síly dosahuje přibližně hodnoty

3900 N. Další výrazné amplitudy jsou při třetí a páté vlastní frekvenci. V Tab. 8.1 jsou vyznačeny vlastní frekvence, které se v amplitudové charakteristice projevují a ty, které jsou utlumeny.

	$f[Hz]$		$f[Hz]$		$f[Hz]$		$f[Hz]$
1	9,905	6	66,392	11	121,400	16	166,887
2	19,908	7	90,764	12	142,798	17	173,391
3	30,673	8	98,177	13	150,216	18	176,156
4	37,171	9	112,637	14	154,354	19	183,095
5	50,743	10	117,869	15	157,104	20	205,293

Tab. 8.3 Nalezené vlastní frekvence (zeleně) a utlumené (červeně)

Pro porovnání tvarů kmitání na výše vyznačených frekvencích s vlastními tvary jsou v příloze C rovněž uvedeny animace v umístěních dle Tab. 8.4.

$f[Hz]$	Název složky	Název souboru
9,905	Harmonická analýza – zavěšení se silentbloky	buzení na 1.vlastní frekvenci.mpg
30,673		buzení na 3.vlastní frekvenci.mpg
50,743		buzení na 5.vlastní frekvenci.mpg
90,764		buzení na 7.vlastní frekvenci.mpg
121,400		buzení na 11.vlastní frekvenci.mpg

Tab. 8.4 Umístění animací na CD

9. Shrnutí a závěr

Předmětem této bakalářské práce bylo posoudit dvě varianty zavěšení motoru na rámu prvního prototypu studentské formule, která se staví na fakultě strojní VŠB-TU Ostrava v rámci mezinárodní studentské soutěže Formula Student. První varianta je zavěšení motoru na pevně, bez použití pružných a tlumících prvků – silentbloků. Tato varianta je na prvním modelu formule realizována. Druhou možností je zavěšení motoru s použitím pouzdrových silentbloků. Posuzovacím kritériem zde byly velikosti sil, které se od vibrací motoru přenášejí přes uchycení na rám. Veškeré MKP modelování a výpočty jsou provedeny v programech Patran a MSC Nastran.

V první části bylo provedeno stanovení potřebných parametrů pro následující výpočty. Jednalo se o zvážení motoru a rámu a měření potřebných rozměrů. Dále byl v katalogu vyhledán vhodný rozměr silentbloku a určeny jeho tuhosti. Bylo provedeno také experimentální měření a výpočet momentu setrvačnosti motoru k jedné jeho ose procházející těžištěm pomocí metody měření doby kmitu. Stejným měřením byla zároveň stanovena poloha těžiště motoru v jedné rovině. Hodnoty zbývajících momentů setrvačnosti byly s korekcemi použity z poskytnutého modelu motoru.

Další část práce se zabývala modální analýzou motoru uloženého na silentblocích a rámu se zavěšeným motorem ve dvou variantách. Modální analýza motoru je provedena analyticky zjednodušeně ve 2D a poté kompletně ve 3D. Celková prostorová úloha je následně ověřena pomocí MKP. Vlastní frekvence motoru z analytického výpočtu se téměř shodují s MKP výpočtem. Rovněž při srovnání modální matice z analytického řešení a animací vlastních tvarů z MKP výpočtu nalezneme shodu. Lze tedy výpočty považovat za správné.

Následující MKP výpočet se zabývá modální analýzou rámu se zavěšeným motorem bez silentbloků a se silentbloky. Rám je tvořen nosníkovým modelem a je uložen v prostoru na pružinách, které nahrazují závěsy kol s odpružením. Výsledkem analýzy jsou opět vlastní frekvence a vlastní tvary kmitání rámu se zavěšeným motorem. Při porovnání hodnot z obou variant je patrné, že vyšší vlastní frekvence vykazuje model bez silentbloků. To svědčí o větší tuhosti celku při tomto řešení. Vyšší tuhost rámu pak může pozitivně ovlivnit ovladatelnost formule.

Poslední část práce se zabývala samotnou harmonickou analýzou obou typů uložení motoru. Jako budící síla zde byla zavedena setrvačná síla od posuvu pístů a budící moment setrvačný moment klikové hřídele. Frekvence buzení byla uvažována v rozsahu provozních otáček motoru. Pro vyhodnocení a porovnání obou variant byly sestrojeny amplitudové charakteristiky sil přenášených přes zavěšení na rám. Při porovnání grafů se ukázalo, že při zavěšení motoru bez silentbloků se na rám přenášejí větší síly než při jejich použití. Maximálních hodnot dosahují síly na rezonančních (vlastních) frekvencích

rámu s daným uložením motoru. Mohutnost přenesených sil je při současném řešení, tedy bez silentbloků, přibližně 7x větší než při použití těchto prvků. Rozdíl je také v oblasti frekvencí, kde se maxima vyskytují. Jak u první, tak u druhé varianty se první špička projevuje v přechodovém pásmu startování motoru, tj. přibližně do 1250-1350 ot/min. U pružného uchycení dále hodnoty sil s rostoucími otáčkami klesají. U pevného zavěšení se však další velmi výrazná špička projevuje v oblasti okolo 6500 ot/min, což je v pásmu provozních otáček motoru.

Z výše uvedeného je patrné, že z hlediska velikosti přenášených sil na rám je výhodnější volit zavěšení motoru s použitím silentbloků. Z tuhostního hlediska, tedy z hlediska ovladatelnosti vozu, se jeví vhodnější varianta s pevným zavěšením motoru. Po dokončení první verze studentské formule by bylo vhodné provést měření za provozu a ověřit tak výše uvedené výpočty. Dále je tedy na zvážení konstrukčního týmu, jaký typ zavěšení zvolí u druhého prototypu studentské formule.

Přehled použité literatury

- [1] VLK, F. *Stavba motorových vozidel*. 1. vyd. Brno: F. Vlk, 2003. 499 s. ISBN 80-238-8757-2
- [2] PÍŠTĚK, V. – ŠTĚTINA, J. *Pevnost a životnost*. 1. vyd. Brno: VUT Brno, 1993. ISBN 80-214-0474-4
- [3] LEINVEBER, J. – VÁVRA, J. *Strojnické tabulky: pomocná učebnice pro školy technického zaměření*. 1.vyd. Úvaly: Albra, 2006. 914 s. ISBN 80-7361-033-7
- [4] MSC Software. *MSC Nastran 2012.2 Documentation*. Santa Ana: The MacNeal – Schwendler Corporation, 2012.
- [5] Yamaha Motor Corporation. *FZ6-SS/FZ6-SSC:Service manual*. 1. vyd. 2003.
- [6] CZ FERRO Steel. [online]. c2011 [cit.2014-04-25]. Dostupné z: <<http://www.czferrosteel.cz/pdf/trubky2-E355.pdf>>.

Poděkování

Tímto děkuji vedoucímu bakalářské práce doc. Ing. Jiřímu Podešvovi, Ph.D. za věnovaný čas, cenné rady a připomínky při její tvorbě.

Děkuji také Ing. Marku Gebauerovi, Ing. Martinu Fuskovi, Ph.D. a Ing. Jakubovi Šmirausovi za ochotu a pomoc při zpracování.

Přílohy

A. Modální analýza 2D úlohy v Mathcadu

$$\begin{array}{llll} m := 52 \text{ kg} & k_x := 196200 \text{ N}\cdot\text{m}^{-1} & h_1 := 0.1823 \text{ m} & b_1 := 0.0827 \text{ m} \\ I := 1.08 \text{ kg}\cdot\text{m}^2 & k_y := 196200 \text{ N}\cdot\text{m}^{-1} & h_2 := 0.1247 \text{ m} & b_2 := 0.1293 \text{ m} \\ & & h_3 := 0.0673 \text{ m} & b_3 := 0.0827 \text{ m} \end{array}$$

MATICE HMOT

$$M := \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix} \quad M = \begin{pmatrix} 52 & 0 & 0 \\ 0 & 52 & 0 \\ 0 & 0 & 1.08 \end{pmatrix}$$

MATICE TUHOSTI

$$K := \begin{bmatrix} 3\cdot k_x & 0 & -k_x(h_1 + h_2 - h_3) \\ 0 & 3\cdot k_y & k_y(b_2 - b_1 - b_3) \\ -k_x(h_1 + h_2 - h_3) & k_y(b_2 - b_1 - b_3) & k_x(h_1^2 + h_2^2 + h_3^2) + k_y(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{pmatrix} 5.886 \times 10^6 & 0 & -4.703 \times 10^5 \\ 0 & 5.886 \times 10^6 & -7.083 \times 10^4 \\ -4.703 \times 10^5 & -7.083 \times 10^4 & 1.642 \times 10^5 \end{pmatrix}$$

MATICE A

$$A := M^{-1} \cdot K$$

$$A = \begin{pmatrix} 1.132 \times 10^5 & 0 & -9.044 \times 10^3 \\ 0 & 1.132 \times 10^5 & -1.362 \times 10^3 \\ -4.355 \times 10^5 & -6.558 \times 10^4 & 1.521 \times 10^5 \end{pmatrix}$$

VLASTNÍ ČÍSLA

VLASTNÍ KRUHOVÉ FREKVENCE

VLASTNÍ FREKVENCE

$$\lambda := \text{eigenvals}(A)$$

$$\lambda_v := \text{sort}(\lambda)$$

$$\Omega := \sqrt{\lambda}$$

$$f := \frac{\Omega}{2\pi}$$

$$\lambda = \begin{pmatrix} 6.626 \times 10^4 \\ 1.132 \times 10^5 \\ 1.99 \times 10^5 \end{pmatrix} \text{ s}^{-2}$$

$$\Omega = \begin{pmatrix} 257.407 \\ 336.441 \\ 446.102 \end{pmatrix} \text{ s}^{-1}$$

$$f = \begin{pmatrix} 40.968 \\ 53.546 \\ 70.999 \end{pmatrix} \text{ Hz}$$

VLASTNÍ TVARY:

1. vlastní tvar

$$c_1 := \text{eigenvec}(A, \lambda_0)$$

$$c_1 = \begin{pmatrix} -0.189 \\ -0.028 \\ -0.982 \end{pmatrix}$$

2. vlastní tvar

$$c_2 := \text{eigenvec}(A, \lambda_1)$$

$$c_2 = \begin{pmatrix} 0.149 \\ -0.989 \\ 0 \end{pmatrix}$$

3. vlastní tvar

$$c_3 := \text{eigenvec}(A, \lambda_2)$$

$$c_3 = \begin{pmatrix} 0.105 \\ 0.016 \\ -0.994 \end{pmatrix}$$

VLASTNÍ TVARY NORMOVANÉ NA JEDNIČKU

$$c11 := \frac{c_1}{-0.982}$$

$$c22 := \frac{c_2}{-0.989}$$

$$c33 := \frac{c_3}{-0.994}$$

$$c11 = \begin{pmatrix} 0.193 \\ 0.029 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$c22 = \begin{pmatrix} -0.151 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$c33 = \begin{pmatrix} -0.105 \\ -0.016 \\ 1 \end{pmatrix}$$

MODÁLNÍ MATICE:

MODÁLNÍ MATICE NORMOVANÁ NA JEDNIČKU:

$$V := \text{augment}(c11, c22, c33)$$

$$Vn := \text{augment}(c11, c22, c33)$$

$$V = \begin{pmatrix} -0.189 & 0.149 & 0.105 \\ -0.028 & -0.989 & 0.016 \\ -0.982 & 0 & -0.994 \end{pmatrix}$$

$$Vn = \begin{pmatrix} 0.193 & -0.151 & -0.105 \\ 0.029 & 1 & -0.016 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

B. Odvození matice tuhosti pro 3D úlohu a výpočet v Mathcadu

Pohybové rovnice pro 3D úlohu mají tvar

$$\begin{aligned} m \cdot \ddot{x} &= \sum F_{ix} \\ m \cdot \ddot{y} &= \sum F_{iy} \\ m \cdot \ddot{z} &= \sum F_{iz} \\ I_x \cdot \ddot{\phi}_x &= \sum M_{iT} \\ I_y \cdot \ddot{\phi}_y &= \sum M_{iT} \\ I_z \cdot \ddot{\phi}_z &= \sum M_{iT}. \end{aligned} \tag{10.1}$$

Po dosazení do soustavy (10.1) dostaneme

$$\begin{aligned} m \cdot \ddot{x} &= -F_{Dx1} - F_{Dx2} - F_{Dx4} - F_{Dx5} - F_{Dx6} \\ m \cdot \ddot{y} &= -F_{Dy1} - F_{Dy2} - F_{Dy4} - F_{Dy5} - F_{Dy6} \\ m \cdot \ddot{z} &= -F_{Dz1} - F_{Dz2} - F_{Dz4} - F_{Dz5} - F_{Dz6} \\ I_x \cdot \ddot{\phi}_x &= F_{Dy1} \cdot c_1 + F_{Dy2} \cdot c_2 - F_{Dy4} \cdot c_4 - F_{Dy5} \cdot c_5 - F_{Dy6} \cdot c_6 - F_{Dz1} \cdot h_1 - F_{Dz2} \cdot h_2 - F_{Dz4} \cdot h_4 - F_{Dz5} \cdot h_5 - F_{Dz6} \cdot h_6 \\ I_y \cdot \ddot{\phi}_y &= -F_{Dx1} \cdot c_1 - F_{Dx2} \cdot c_2 + F_{Dx4} \cdot c_4 + F_{Dx5} \cdot c_5 + F_{Dx6} \cdot c_6 - F_{Dz1} \cdot b_1 + F_{Dz2} \cdot b_2 - F_{Dz4} \cdot b_4 + F_{Dz5} \cdot b_5 + F_{Dz6} \cdot b_6 \\ I_z \cdot \ddot{\phi}_z &= F_{Dx1} \cdot h_1 + F_{Dx2} \cdot h_2 + F_{Dx4} \cdot h_4 + F_{Dx5} \cdot h_5 + F_{Dx6} \cdot h_6 + F_{Dy1} \cdot b_1 - F_{Dy2} \cdot b_2 + F_{Dy4} \cdot b_4 - F_{Dy5} \cdot b_5 - F_{Dy6} \cdot b_6. \end{aligned} \tag{10.2}$$

Direkční síly pro náš případ budou mít tvar

$$F_{Dx1} = k_x \cdot (x - \varphi_z \cdot h_1 + \varphi_y \cdot c_1)$$

$$F_{Dx2} = k_x \cdot (x - \varphi_z \cdot h_2 + \varphi_y \cdot c_2)$$

$$F_{Dx4} = k_x \cdot (x - \varphi_z \cdot h_4 - \varphi_y \cdot c_4)$$

$$F_{Dx5} = k_x \cdot (x - \varphi_z \cdot h_5 - \varphi_y \cdot c_5)$$

$$F_{Dx6} = k_x \cdot (x - \varphi_z \cdot h_6 - \varphi_y \cdot c_6)$$

$$F_{Dy1} = k_y \cdot (y - \varphi_z \cdot b_1 - \varphi_x \cdot c_1)$$

$$F_{Dy2} = k_y \cdot (y + \varphi_z \cdot b_1 - \varphi_x \cdot c_2)$$

$$F_{Dy4} = k_y \cdot (y - \varphi_z \cdot b_4 + \varphi_x \cdot c_4)$$

$$F_{Dy5} = k_y \cdot (y + \varphi_z \cdot b_5 + \varphi_x \cdot c_5)$$

$$F_{Dy6} = k_y \cdot (y + \varphi_z \cdot b_6 + \varphi_x \cdot c_6)$$

(10.3)

$$F_{Dz1} = k_z \cdot (z + \varphi_x \cdot h_1 + \varphi_y \cdot b_1)$$

$$F_{Dz2} = k_z \cdot (z + \varphi_x \cdot h_2 - \varphi_y \cdot b_2)$$

$$F_{Dz4} = k_z \cdot (z + \varphi_x \cdot h_4 + \varphi_y \cdot b_4)$$

$$F_{Dz5} = k_z \cdot (z + \varphi_x \cdot h_5 - \varphi_y \cdot b_5)$$

$$F_{Dz6} = k_z \cdot (z + \varphi_x \cdot h_6 - \varphi_y \cdot b_6)$$

Následuje výpis z Mathcadu, včetně odvozené matice tuhosti.

MATICE TUHOSTI

$$K_{xx} = \begin{bmatrix} 5k_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5k_y & 0 & 0 & -k_y \cdot (c1 + c2 - c4 - c5 - c6) & 0 \\ 0 & 0 & 5k_z & 0 & k_z \cdot (h1 + h2 + h4 + h5 + h6) & k_z \cdot (h1 + h2 + h4 + h5 + h6) \\ 0 & -k_y \cdot (c1 + c2 - c4 - c5 - c6) & k_z \cdot (h1 + h2 + h4 + h5 + h6) & k_y \cdot (c1^2 + c2^2 + c4^2 + c5^2 + c6^2) & k_z \cdot (h1^2 + h2^2 + h4^2 + h5^2 + h6^2) & 0 \\ k_x \cdot (c1 + c2 - c4 - c5 - c6) & 0 & k_z \cdot (b1 - b2 + b4 - b5 - b6) & k_z \cdot (b1 \cdot h1 - b2 \cdot h2 + b4 \cdot h4 - b5 \cdot h5 - b6 \cdot h6) & 0 & 0 \\ -k_x \cdot (h1 + h2 + h4 + h5 + h6) & -k_y \cdot (b1 - b2 + b4 - b5 - b6) & 0 & k_y \cdot (b1 \cdot c1 - b2 \cdot c2 - b4 \cdot c4 + b5 \cdot c5 + b6 \cdot c6) & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K_{yy} = \begin{bmatrix} k_x \cdot (c1 + c2 - c4 - c5 - c6) & 0 & k_z \cdot (b1 - b2 + b4 - b5 - b6) & k_z \cdot (b1 \cdot h1 - b2 \cdot h2 + b4 \cdot h4 - b5 \cdot h5 - b6 \cdot h6) & k_y \cdot (b1 \cdot c1 - b2 \cdot c2 - b4 \cdot c4 + b5 \cdot c5 + b6 \cdot c6) & 0 \\ 0 & k_z \cdot (b1 - b2 + b4 - b5 - b6) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_z \cdot (b1 \cdot h1 - b2 \cdot h2 + b4 \cdot h4 - b5 \cdot h5 - b6 \cdot h6) & k_x \cdot (c1^2 + c2^2 + c4^2 + c5^2 + c6^2) & k_z \cdot (b1^2 + b2^2 + b4^2 + b5^2 + b6^2) & k_x \cdot (-c1 \cdot h1 - c2 \cdot h2 + c4 \cdot h4 + c5 \cdot h5 + c6 \cdot h6) & k_x \cdot (h1^2 + h2^2 + h4^2 + h5^2 + h6^2) & k_y \cdot (b1^2 + b2^2 + b4^2 + b5^2 + b6^2) \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} 9.81 \times 10^6 & 0 & 0 & 0 & -1.55 \times 10^5 & -1.449 \times 10^6 \\ 0 & 9.81 \times 10^6 & 0 & 1.55 \times 10^5 & 0 & 7.073 \times 10^5 \\ 0 & 0 & 1.13 \times 10^6 & 1.669 \times 10^5 & -8.147 \times 10^4 & 0 \\ 0 & 1.55 \times 10^5 & 1.669 \times 10^5 & 2.572 \times 10^5 & -8.007 \times 10^3 & 8.3 \times 10^4 \\ -1.55 \times 10^5 & 0 & -8.147 \times 10^4 & -8.007 \times 10^3 & 2.545 \times 10^5 & 1.458 \times 10^4 \\ -1.449 \times 10^6 & 7.073 \times 10^5 & 0 & 8.3 \times 10^4 & 1.458 \times 10^4 & 4.893 \times 10^5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 m &:= 52 \text{ kg} & k_x &:= 196200 \text{ N}\cdot\text{m}^{-1} \\
 I_x &:= 1.04 \text{ kg}\cdot\text{m}^2 & k_y &:= 196200 \text{ N}\cdot\text{m}^{-1} \\
 I_y &:= 0.92 \text{ kg}\cdot\text{m}^2 & k_z &:= 22600 \text{ N}\cdot\text{m}^{-1} \\
 I_z &:= 1.08 \text{ kg}\cdot\text{m}^2 \\
 b_1 &:= 0.0827 \text{ m} & c_1 &:= 0.1 \text{ m} & h_1 &:= 0.1823 \text{ m} \\
 b_2 &:= 0.1293 \text{ m} & c_2 &:= 0.215 \text{ m} & h_2 &:= 0.1247 \text{ m} \\
 b_4 &:= 0.0827 \text{ m} & c_4 &:= 0.058 \text{ m} & h_4 &:= 0.1823 \text{ m} \\
 b_5 &:= 0.1293 \text{ m} & c_5 &:= 0.168 \text{ m} & h_5 &:= 0.1247 \text{ m} \\
 b_6 &:= 0.2673 \text{ m} & c_6 &:= 0.168 \text{ m} & h_6 &:= 0.1247 \text{ m}
 \end{aligned}$$

MATICE HMOT

$$M := \begin{pmatrix} m & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_z \end{pmatrix} \quad M = \begin{pmatrix} 52 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 52 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 52 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.04 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.92 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.08 \end{pmatrix}$$

MATICE A

$$A := M^{-1} \cdot K \\
 A = \begin{pmatrix} 1.887 \times 10^5 & 0 & 0 & 0 & -2.981 \times 10^3 & -2.787 \times 10^4 \\ 0 & 1.887 \times 10^5 & 0 & 2.981 \times 10^3 & 0 & 1.36 \times 10^4 \\ 0 & 0 & 2.173 \times 10^4 & 3.211 \times 10^3 & -1.567 \times 10^3 & 0 \\ 0 & 1.49 \times 10^5 & 1.605 \times 10^5 & 2.473 \times 10^5 & -7.699 \times 10^3 & 7.981 \times 10^4 \\ -1.685 \times 10^5 & 0 & -8.856 \times 10^4 & -8.703 \times 10^3 & 2.766 \times 10^5 & 1.585 \times 10^4 \\ -1.342 \times 10^6 & 6.549 \times 10^5 & 0 & 7.685 \times 10^4 & 1.35 \times 10^4 & 4.53 \times 10^5 \end{pmatrix}$$

VLASTNÍ ČÍSLA

$$\lambda := \text{eigenvals}(A)$$

$$\lambda_{\text{sort}} := \text{sort}(\lambda)$$

$$\lambda = \begin{pmatrix} 1.863 \times 10^4 \\ 6.304 \times 10^4 \\ 1.826 \times 10^5 \\ 2.37 \times 10^5 \\ 2.843 \times 10^5 \\ 5.904 \times 10^5 \end{pmatrix} \text{ s}^{-2}$$

VLASTNÍ KRUHOVÉ FREKVENCE

$$\Omega := \sqrt{\lambda}$$

$$\Omega = \begin{pmatrix} 136.491 \\ 251.084 \\ 427.369 \\ 486.862 \\ 533.152 \\ 768.354 \end{pmatrix} \text{ s}^{-1}$$

VLASTNÍ FREKVENCE

$$f := \frac{\Omega}{2 \cdot \pi}$$

$$f = \begin{pmatrix} 21.723 \\ 39.961 \\ 68.018 \\ 77.487 \\ 84.854 \\ 122.287 \end{pmatrix} \text{ Hz}$$

VLASTNÍ TVARY:

1. vlastní tvar

$$c_1 := \text{eigenvec}(A, \lambda_0)$$

$$c_1 = \begin{pmatrix} -0.045 \\ 9.843 \times 10^{-3} \\ -0.73 \\ 0.585 \\ -0.245 \\ -0.251 \end{pmatrix}$$

2. vlastní tvar

$$c_2 := \text{eigenvec}(A, \lambda_1)$$

$$c_2 = \begin{pmatrix} 0.207 \\ -0.093 \\ -0.026 \\ -0.299 \\ 0.072 \\ 0.924 \end{pmatrix}$$

3. vlastní tvar

$$c_3 := \text{eigenvec}(A, \lambda_2)$$

$$c_3 = \begin{pmatrix} 0.152 \\ 0.406 \\ -0.019 \\ -0.885 \\ 0.17 \\ 0.015 \end{pmatrix}$$

4. vlastní tvar

$$c_4 := \text{eigenvec}(A, \lambda_3)$$

$$c_4 = \begin{pmatrix} -0.044 \\ -0.019 \\ -9.829 \times 10^{-3} \\ -0.881 \\ -0.454 \\ 0.125 \end{pmatrix}$$

5. vlastní tvar

$$c_5 := \text{eigenvec}(A, \lambda_4)$$

$$c_5 = \begin{pmatrix} 0.021 \\ 0.015 \\ 9.913 \times 10^{-3} \\ 0.355 \\ -0.934 \\ 0.026 \end{pmatrix}$$

6. vlastní tvar

$$c_6 := \text{eigenvec}(A, \lambda_5)$$

$$c_6 = \begin{pmatrix} 0.068 \\ -0.034 \\ -1.13 \times 10^{-3} \\ -0.238 \\ -0.078 \\ -0.965 \end{pmatrix}$$

VLASTNÍ TVARY NORMOVANÉ NA JEDNIČKU

$$c_{11} := \frac{c_1}{-0.7299}$$

$$c_{11} = \begin{pmatrix} 0.062 \\ -0.013 \\ 1 \\ -0.802 \\ 0.336 \\ 0.344 \end{pmatrix}$$

$$c_{22} := \frac{c_2}{0.924}$$

$$c_{22} = \begin{pmatrix} 0.224 \\ -0.101 \\ -0.028 \\ -0.324 \\ 0.077 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$c_{33} := \frac{c_3}{-0.885}$$

$$c_{33} = \begin{pmatrix} -0.172 \\ -0.458 \\ 0.022 \\ 1 \\ -0.192 \\ -0.016 \end{pmatrix}$$

$$c_{44} := \frac{c_4}{-0.881}$$

$$c_{44} = \begin{pmatrix} 0.05 \\ 0.022 \\ 0.011 \\ 1 \\ 0.515 \\ -0.142 \end{pmatrix}$$

$$c_{55} := \frac{c_5}{-0.934}$$

$$c_{55} = \begin{pmatrix} -0.023 \\ -0.016 \\ -0.011 \\ -0.38 \\ 1 \\ -0.028 \end{pmatrix}$$

$$c_{66} := \frac{c_6}{-0.965}$$

$$c_{66} = \begin{pmatrix} -0.07 \\ 0.036 \\ 1.171 \times 10^{-3} \\ 0.247 \\ 0.081 \\ 1 \end{pmatrix}$$

MODÁLNÍ MATICE:

$$V := \text{augment}(c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6)$$

$$V = \begin{pmatrix} -0.045 & 0.207 & 0.152 & -0.044 & 0.021 & 0.068 \\ 9.843 \times 10^{-3} & -0.093 & 0.406 & -0.019 & 0.015 & -0.034 \\ -0.73 & -0.026 & -0.019 & -9.829 \times 10^{-3} & 9.913 \times 10^{-3} & -1.13 \times 10^{-3} \\ 0.585 & -0.299 & -0.885 & -0.881 & 0.355 & -0.238 \\ -0.245 & 0.072 & 0.17 & -0.454 & -0.934 & -0.078 \\ -0.251 & 0.924 & 0.015 & 0.125 & 0.026 & -0.965 \end{pmatrix}$$

MODÁLNÍ MATICE NORMOVANÁ NA JEDNIČKU:

$$V_n := \text{augment}(c_{11}, c_{22}, c_{33}, c_{44}, c_{55}, c_{66})$$

$$V_n = \begin{pmatrix} 0.062 & 0.224 & -0.172 & 0.05 & -0.023 & -0.07 \\ -0.013 & -0.101 & -0.458 & 0.022 & -0.016 & 0.036 \\ 1 & -0.028 & 0.022 & 0.011 & -0.011 & 1.171 \times 10^{-3} \\ -0.802 & -0.324 & 1 & 1 & -0.38 & 0.247 \\ 0.336 & 0.077 & -0.192 & 0.515 & 1 & 0.081 \\ 0.344 & 1 & -0.016 & -0.142 & -0.028 & 1 \end{pmatrix}$$

C. CD nosič

- text bakalářské práce
- animace: modální analýza motoru – 6 vlastních tvarů
modální analýza rámu s motorem zavěšeným bez silentbloků – 20
vlastních tvarů
modální analýza rámu s motorem zavěšeným se silentbloky – 20
vlastních tvarů
harmonická analýza zavěšení bez silentbloků – 5 tvarů kmitání
harmonická analýza zavěšení se silentbloky – 5 tvarů kmitání
- katalog silentbloků firmy ContiTech